Co-faktor utveckling

Lemma 1. *Om i matrisen $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,n}$ alla tal i första rad utom det första är noll, so gäller co-faktor utvekling för första raden, d.v.s. $det(A) = a_{11}det(A_{11})$, där $A_{11} = (a_{ij})_{i,j=2}^{n,n}$.*

Bevis. Om vi betraktar definition av determinant, så ser vi att alla produkter i summan har ngon element från första rad. Alltså om den element är inte a_{11}, såär den noll (och då är hela produkten noll). Så gäller $det(A) = \sum_{\tau,\tau(1)=1} \sigma(\tau) a_{11} a_{2\tau(2)} \ldots a_{n\tau(n)}$. Om vi nu för varje permutation τ som börjas på 1 inför en permutation τ' av $(n-1)$ tal, genom att ta bort första tal, och minska varje tal i permutationen med ett, så ser vi att $\sigma(\tau) = \sigma(\tau')$ och $det(A) = \sum_{\tau'} \sigma(\tau') a_{11} a_{2\tau(2)} \ldots a_{n\tau(n)} = a_{11} det(A_{11})$. $\square$

Lemma 2. *Om i en matris A alla tal i första rad är lika med noll, utom ett, så gäller co-faktor utveckling för första rad.*

Bevis. Låt oss bevisa lemman med induktion i nummer av kolonn j i vilken i första rad står ikke-noll talet. Basen är $j = 1$, och det är förra lemma. Om vi kan bevisa för $j = k$, och vi vill visa det för $j = k + 1$, så kan vi betrakta matris B som man får från A genom att byta plats på kolonnerna k och $(k + 1)$. Vi vet att $det(A) = -det(B)$. För B kan vi använda induktionens antagande, så $det(B) = b_{1k}(-1)^{k+1}det(B_{1k})$. Nu $B_{1k} = A_{a(k+1)}$, och $b_{1k} = a_{1(k+1)}$ såvi ser att $det(A) = -a_{1(k+1)}(-1)^{k+1}det(A_{1(k+1)}) = a_{1(k+1)}(-1)^{k+2}det(A_{1(k+1)})$, d.v.s. co-faktor utvecklingen gäller för A. Genom induktionprincipen lemman är bevisat. $\square$

Nu vi kan använda oss från följande egenskap hos determinanter:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(Man kan inse det genom att skriva definition för vänstersida, öppna paranteser och omgruppera summatermer.)

Nu,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+0 & 0+a_{12} & \ldots & 0+a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \ldots$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{(n-1)2} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} + \ldots + a_{1n}C_{1n}.$$

Att visa att co-faktor utveckling gäller alla rader kan man på samma sätt på vilket vi visade Lemma 2.