

RELEVANTA DEFINITIONER

Beteckning 1. En mängd av vektorer $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ kallas ibland ett *system av vektorer* och betäknas som $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^n$ ¹.

Definition 2. Vi säger att vektor $\mathbf{u} \in V$ är en *linjär kombination* av vektorerna $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^n$ om det finns sådana tal a_1, \dots, a_n att $\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n$ ($= \sum_{j=1}^n a_j\mathbf{v}_j$).

Detta betecknas $\mathbf{u} \in \text{span}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\})$, där den linjära höljen $\text{span}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\})$ är mängden av alla möjliga linjära kombinationer av vektorerna $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^n$.

Observation 3. Talen a_1, \dots, a_n är inte nödvändigt unika.

Observation 4. Om för $\{\mathbf{v}_{j_1}, \dots, \mathbf{v}_{j_p}\} \subset \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ gäller $\mathbf{u} \in \text{span}(\{\mathbf{v}_{j_1}, \dots, \mathbf{v}_{j_p}\})$ så gäller också $\mathbf{u} \in \text{span}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\})$.

Definition 5. Ett system av vektorer $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^n$ kallas *linjärt oberoende* om varje av vektorer \mathbf{v}_j kan inte skrivas som en linjär kombination av andra vektorer i systemet.

Ekvivalent till den är följande:

Definition 6. Ett system av vektorer $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^n$ kallas *linjärt oberoende* om för alla möjliga koefficienter $\{a_j\}$ likheten $a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ uppfylls endast om $a_1 = \dots = a_n = 0$.

Definition 7. Ett system av vektorer $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$ i ett vektorrum V som är linjärt oberoende, och har hela rummet V som linjärt hölje (dvs. $V = \text{span}(\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\})$) kallas en *bas* av vektorrummet V .

DEFINITION AV DIMENSION AV ETT VEKTORRUM

Sats 8. Om ett vektorrum V har två baser: $\mathbb{B} = \{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^p$ och $\tilde{\mathbb{B}} = \{\tilde{\mathbf{e}}_k\}_{k=1}^q$, så består baserna av samma antal av vektorer, dvs. $p = q$.

Bevis. Vi ska rekursivt bygga upp en sekvens av baser \mathbb{B}_m på sådant sätt att

- (1) $\mathbb{B}_0 = \mathbb{B}$;
- (2) Vi kan beteckna vektorer i \mathbb{B}_m och \mathbb{B}_{m+1} så att $\mathbb{B}_m = \{\mathbf{f}_j\}_{j=1}^p$, $\mathbb{B} = \{\tilde{\mathbf{f}}_j\}_{j=1}^p$ och för ngon $k^* \in [1, p]$ gäller $\mathbf{f}_j = \tilde{\mathbf{f}}_j$, då $j \neq k^*$;
- (3) \mathbb{B}_m innehåller minst m vektorer från $\tilde{\mathbb{B}}$.

Vi börjar med $\mathbb{B}_0 = \mathbb{B}$. Då vi på steg m har skapat \mathbb{B}_m vi ser **om** det finns någon vektor i $\tilde{\mathbb{B}}$ som är inte med i \mathbb{B}_m . Ta den vektor som \mathbf{e}^* . Vi vet alltså att $\mathbf{e}^* \in \tilde{\mathbb{B}}$ och $\mathbf{e}^* \notin \mathbb{B}_m$.

Eftersom \mathbb{B}_m är en bas i V , vi kan hitta koefficienterna $\{\alpha_j\}_{j=1}^p$, så att $\mathbf{e}^* = \alpha_1\mathbf{f}_1 + \dots + \alpha_p\mathbf{f}_p = \sum_{j=1}^p \alpha_j\mathbf{f}_j$. Betrakta alla \mathbf{f}_j som ingår i linjär kombinationen med

ikke-noll koefficient (d.v.s. $\alpha_j \neq 0$). En del av sådana vektorer kan ingå i $\tilde{\mathbb{B}}$, men inte alla, för att \mathbf{e}^* kan inte framställas som en linjär kombination av andra vektorer i $\tilde{\mathbb{B}}$ ($\tilde{\mathbb{B}}$ är en bas). Låt k^* är nummer på en vektor som har ikke-noll koefficient och inte ingår i $\tilde{\mathbb{B}}$ (om det finns flera sådana vi tar vilken som helst).

¹Om ordningen av numreringen är viktigt använder man runda paranteser, så som med matriser: $(\mathbf{v}_j)_{j=1}^n$ som $(a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$.

Vi får nu \mathbb{B}_{m+1} genom att ersätta \mathbf{f}_{k^*} med \mathbf{e}^* . Det är uppenbart att villkorna (1),(2),(3) uppfylls, men vi måste kontrollera att \mathbb{B}_{m+1} är en bas.

- (1) Om inte \mathbb{B}_{m+1} är linjärt oberoende, då finns det sådana $\{\beta_j\}_{j=1}^p$ att $\beta_1\tilde{\mathbf{f}}_1 + \dots + \beta_p\tilde{\mathbf{f}}_p = \mathbf{0}$ och inte alla β_j är noll.
- (a) Om $\beta_{k^*} = 0$ så $\beta_1\mathbf{f}_1 + \dots + \beta_p\mathbf{f}_p = \beta_1\tilde{\mathbf{f}}_1 + \dots + \beta_p\tilde{\mathbf{f}}_p = \mathbf{0}$, vilket kan inte hända då \mathbb{B}_m är en bas.
- (b) Om $\beta_{k^*} \neq 0$ så $\mathbf{0} = \beta_1\tilde{\mathbf{f}}_1 + \dots + \beta_p\tilde{\mathbf{f}}_p = \beta_1\mathbf{f}_1 + \dots + \beta_{k^*}(\alpha_1\mathbf{f}_1 + \dots + \alpha_p\mathbf{f}_p) + \beta_p\mathbf{f}_p$. Efter vi öppnar paranteser i högerled, ser vi att \mathbf{f}_{k^*} ingår med koefficienten $\beta_{k^*}\alpha_{k^*} \neq 0$, vilket kan inte hända då \mathbb{B}_m är en bas. Alltså är \mathbb{B}_{m+1} linjärt oberoende.
- (2) Betrakta $\mathbf{x} \in V$. Den kan skrivas som $\mathbf{x} = x_1\mathbf{f}_1 + \dots + x_p\mathbf{f}_p$. Men $\mathbf{f}_j = \tilde{\mathbf{f}}_j$ för $j \neq k^*$ och $\mathbf{f}_{k^*} = \frac{1}{\alpha_{k^*}}(\alpha_1\tilde{\mathbf{f}}_1 + \dots + (-\tilde{\mathbf{f}}_{k^*}) + \dots + \alpha_p\tilde{\mathbf{f}}_p)$. Så $\mathbf{x} \in \text{span}(\{\tilde{\mathbf{f}}_j\}_{j=1}^p)$. Eftersom x valdes godtyckligt från V , betyder detta att $\text{span}(\mathbb{B}_{m+1}) = V$.

Alltså på varje steg i vår konstruktionen får vi en bas.

Vi kan inte ha mera än q steg för att det finns bara q vektorer i $\tilde{\mathbb{B}}$. Men konstruktioner stannar på steg m endast om det finns inga vektorer i $\tilde{\mathbb{B}}$ som är inte med i \mathbb{B}_m . Det betyder att för den steg på vilken vi stannar $\tilde{\mathbb{B}} \subset \mathbb{B}_m$. Om det finns $\mathbf{f}_j \in \mathbb{B}_m$ sådan att den är inte är i $\tilde{\mathbb{B}}$, då $\mathbf{f}_j \in V = \text{span}(\tilde{\mathbb{B}})$, vilket betyder att \mathbf{f}_j är en linjärt kombination av andra vektorer ur \mathbb{B}_m (vilket kan inte hända då \mathbb{B}_m är en bas). Alltså måste $\tilde{\mathbb{B}} = \mathbb{B}_m$, och då har de lika många elementer, d.v.s. $p = q$. \square

Satsen gör det möjligt för oss att införa följande definitionen.

Definition 9. Antal av elementer i en bas av ett vektorrum V kallas *dimension* av V och betecknas $\dim(V)$.

Påstående 10. Ett system $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\} \subset V$ är alltid linjärt beroende om $m > \dim(V)$.

Obs! Ett system kan vara linjärt beroende till och med om $m < \dim(V)$.

Bevis med ett fel. Anta att systemet $\mathbb{U} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ är linjärt oberoende. Om inte $\text{span}(\mathbb{U}) = V$, det finns $\mathbf{u}_{m+1} \in V$, sådan att \mathbf{u}_{m+1} är inte linjär kombination av \mathbb{U} . Betrakta $\mathbb{U}_1 = \mathbb{U} \cup \{\mathbf{u}_{m+1}\}$.

Om \mathbb{U}_1 är linjärt beroende då det finns $\{\alpha_j\}_{j=1}^{m+1}$ sådana att $\alpha_1\mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_m\mathbf{u}_m + \alpha_{m+1}\mathbf{u}_{m+1} = \mathbf{0}$ och inte alla α_j är noll.

- (1) Om $\alpha_{m+1} = 0$ då $\alpha_1\mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_m\mathbf{u}_m = \mathbf{0}$, så $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$, för att \mathbb{U} är en bas. Alltså $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = \alpha_{m+1} = 0$, vilket är inte valet av $\{\alpha_j\}_{j=1}^{m+1}$.
- (2) Om $\alpha_{m+1} \neq 0$ då $\mathbf{u}_{m+1} = \frac{-\alpha_1}{\alpha_{m+1}}\mathbf{u}_1 + \dots + \frac{-\alpha_m}{\alpha_{m+1}}\mathbf{u}_m$, d.v.s. \mathbf{u}_{m+1} är en linjär kombination av vektorerna ur \mathbb{U} , vilket var inte valet av \mathbf{u}_{m+1} .

Så \mathbb{U}_1 är linjärt oberoende.

Fortsätt så. Då vi stannar är \mathbb{U}_k linjärt oberoende och $\text{span}(\mathbb{U}_k) = V$. Alltså är \mathbb{U}_k en bas.

Nu, å ena hand har \mathbb{U}_k exakt $\dim(V)$ elementer för att den är en bas i V . Å andra hand har vi fått \mathbb{U}_k genom att lägga några elementer till \mathbb{U} . Så

$$\dim(V) < m \leq m + k = \dim(V)(?!)$$

Det bevisar att systemet \mathbb{U} är linjärt beroende. \square

Övning. Hitta felet och gör ett riktigt bevis. *Tips:* Man kan fixa en bas i V och göra som i beviset av Satsen 8.