**MATEMATIK**
**Chalmers Tekniska Högskola**

Ange CTH - nummer eller personnummer, samt linje, inskrivningsår och namn.

**Tentamensskrivning i**
**Reell Matematisk Analys F, del A, (TMA 975)**
Datum: 2002-08-23, 08.45 - 12.45
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Fredrik Altenstedt tel. 0740 459022

---

1. Lös differentialekvationen $y'' + 2y' - 3y = 8xe^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ . (7p)

2. Bestäm konvergensintervallet och summan för potensserien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8^k}{k} x^{3k}$ . (7p)

3. a) Beräkna $\cos(0.1)$ approximativt med Maclaurinpolynomet av grad 2. Ange också en felgräns ! (4p)

   b) Beräkna $\lim_{x \to 0} \frac{24\cos x + 12x^2 - 24}{x^2 - x\sin x}$ . (4p)

4. För vilka reella tal $p$ och $q$ konvergerar följande serier (8p)

   a) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sin(n^{-p})$ b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^q (\ln n)^2}$

5. Vid numerisk lösning av differentialekvationen $y' + ay = f(t)$ kan man ersätta derivatan (8p)
   $y'$ med differenskvoten $\frac{y(t+h) - y(t)}{h}$ där $h$ är ett fixt men litet tal, (Eulers metod).
   Genom att sätta $t = nh$, $y_n = y(nh)$ och $d_n = f(nh)$ där $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
   diskretiseras differentialekvationen och en approximerande differensekvation erhålls istället. Sätt upp differensekvationen i fallet $a = 1$ och $f(t) = t$ och med begynnelse-data $y(0) = 0$ . Jämför sedan lösningen till differensekvationen med lösningen till den ursprungliga differentialekvationen.

6. Låt $c$ vara ett godtyckligt reellt tal. Sätt $f_n(x) = n^c x(1 - x^2)^n, \; 0 \le x \le 1$ . (7p)
   Visa först att $f_n(x) \to 0$ punktvis på $[0, 1]$ . Undersök sedan för vilka $c$ som funktionsföljden $f_n(x)$ konvergerar likformigt på $[0, 1]$ .

7. Formulera och bevisa Maclaurins formel med Lagranges restterm. (8p)

8. Visa att om potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergerar i punkten $x_0 \neq 0$ , så konvergerar (7p)
   serien absolut för alla $x$ sådana att $|x| < |x_0|$ .

Lösningar till "Reell Matematisk Analys F, del A" (TMA975)
2002-08-23

1. Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2+2r-3=0 \quad , \quad r_{1,2}=-1\pm 2=-3,1 \, .$$

Dvs, den allmänna homogena lösningen är

$$y_h(x)=c_1e^{-3x}+c_2e^x \, .$$

Vi ansätter som partikulärlösning $y_p(x)=(Ax^2+Bx)e^x$

$$y_p' = (Ax^2+(2A+B)x+B)e^x \qquad (=(x^2+4x+2)e^x$$

$$y_p'' = (Ax^2+(4A+B)x+2A+2B)e^x$$

Insatt i differentialekvationen så erhåller vi:

$$(\underbrace{A+2A-3A}_{=0})x^2+(\underbrace{4A+B+4A+2B-3B}_{8A})x+\underbrace{2A+2B+2B}_{2A+4B})e^x=8xe^x$$

$\therefore$ $8A=8$, $\underline{\underline{A=1}}$ ; $2A+4B=0$, $B=-\frac{1}{2}$.

Dvs den allmänna lösningen är

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=c_1e^{-3x}+c_2e^x+(x^2-\tfrac{1}{2}x)e^x$$

Men

$$\left.\begin{aligned} y(0)&=c_1+c_2=1\\ y'(0)&=-3c_1+c_2-\tfrac{1}{2}=0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} -4c_1&=-\tfrac{1}{2}\\ c_1&=\tfrac{1}{8}\\ c_2&=1-c_1=\tfrac{7}{8}\, . \end{aligned}$$

**Svar:** $\underline{\underline{y(x)=\frac{1}{8}e^{-3x}+(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{7}{8})e^x}}$

2. $8^kx^{3k}=(8x^3)^k$, sätt $t=8x^3$.

Då är

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8^kx^{3k}}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k}=f(t)\, . \ (\text{def.!})$$

Vi deriverar $f(t)$ (m.a.p. $t$) och potensserien termvis!

$$f'(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\cdot t^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}t^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}t^k=\frac{1}{1-t} \ !$$

Den geometriska serien är konv. om.om. $|t|<1$
(för $t=\pm1$ går termerna i serien ej mot noll!)
Och därmed är den ursprungliga serien konvergent om $|t|<1$. För $t=1$ erhåller vi: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ som ju är divergent och för $t=-1$ så får vi: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ som enligt Leibniz konv. kriterium är konvergent.

Dvs $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k}$ är konv. om.om. $-1\le t<1$.

: För $|t|<1$ så är $f'(t)=\frac{1}{1-t}$, $f(t)=-\ln(1-t)+C$

Men $f(0)=-\ln 1+C=C$
$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{0^k}{k}=0$ $\Big\}$ Dvs $C=0$

Och $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k}=\ln(1-t)$.

Till sist $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8^kx^{3k}}{k}=\ln(1-8x^3)$, $|8x^3|<1$, $|x|<\frac{1}{2}$

och potensserien konv. precis då $-1\le 8x^3<1$
dvs då $-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}$

**3a** $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \underbrace{\frac{\cos \theta x}{4!}x^4}_{\varepsilon(x)\ \text{(felet)}}$ för ngt. $\theta : 0<\theta<1$.

Dvs $\cos(0.1) = 1 - \frac{1}{2}(0.1)^2 + \varepsilon = \frac{1.99}{2} + \varepsilon = 0.995 + \varepsilon$

där $|\varepsilon| \le \frac{1}{24}\cdot(0.1)^4 \le 0.000005$

Dvs $\cos(0.1) = 0.995 \pm 0.000005$

**b)** $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + B(x)x^5$

$x^2 - x\sin x = \frac{1}{6}x^4 + B(x)x^6 = x^4\left(\frac{1}{6} + B(x)x^2\right)$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + B(x)x^5$

Dvs $\lim_{x\to 0} \frac{24\cos x + 12x^2 - 24}{x^2 - x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4(1 + B(x)x)}{x^4\left(\frac{1}{6} + B(x)x^2\right)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + B(x)x}{\frac{1}{6} + B(x)x^2} = 6$

$B(x)$ är funktioner som är begr. i en omgivning till origo.

**4a** Sätt $a_n = (1+\frac{1}{n})^n \sin(n^{-p})$

$(1+\frac{1}{n})^n \to e$ då $n \to \infty$

och

$\sin(n^{-p}) \to 0$ då $n \to \infty$ om.m. $p > 0$,

så för att serie skall konvergera måste $p > 0$

För små $x$ gäller att $\sin x \approx x$, vi jämför

därför termerna $a_n$ med $b_n = n^{-p}$

Då är $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^{-p})}{n^{-p}} =$ VGV

$= e \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^{-p})}{n^{-p}} = \left[\begin{array}{l} x = n^{-p}\ (p>0) \\ \to 0 \text{ då } n\to\infty \end{array}\right] = e \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

$\neq 0$

Dvs $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konv. om.m. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konv.

Men $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ är konv. precis då $p > 1$.

Svar: $p > 1$.

**b)** Sätt $f(x) = \frac{1}{x^q(\ln x)^2}$, Eftersom $f(x)$ avtar för $x \ge 2$ så kan vi jämföra serien $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ med integralen $\int_2^{\infty} f(x)\,dx$.

$\int_2^{\infty} f(x)\,dx = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^q(\ln x)^2} = \left[\begin{array}{l|l} t = \ln x & \infty \to \infty \\ dt = \frac{dx}{x} & 2 \to \ln 2 \end{array}\right]$

$= \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{x^{q-1}t^2} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{e^{(1-q)t}}{t^2}\,dt \quad (*)$

För $1-q > 0$ så divergerar integralen och för $1-q \le 0$ så konvergerar integralen!

Dvs serien $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^q(\ln n)^2}$ konvergerar precis

då $\underline{\underline{q \ge 1}}$

$(*)$ $\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t^2}$ är konv. och $\frac{e^{(1-q)t}}{t^2} \le \frac{1}{t^2}$ om $q \ge 1$.

5. Vi löser differentialekvationen först.

(*) $y' + y = t$ (integrerande faktor är $e^t$)

$$(e^t y)' = te^t$$

$$e^t y = \int te^t\,dt = te^t - \int e^t\,dt = (t-1)e^t + C.$$

Dvs

$$y(t) = t - 1 + Ce^{-t},$$

Men $y(0) = -1 + C = 0$, $C = 1$ $\Big\}$ $\underline{\underline{y(t) = t - 1 + e^{-t}}}$

Diskretiserar vi (*) så erhåller vi $\left( y' \approx \frac{y((n+1)h) - y(nh)}{h} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} \right)$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} + y_n = nh$$

(**) $y_{n+1} - (1-h)y_n = nh^2$, $y_0 = y(0) = 0$.

Allmän homogen lösn. är $y_n^h = C\cdot(1-h)^n$.

Vi ansätter $y_n^p = An + B$, då är

$y_{n+1}^p = An + A + B$. och efter insättning i (**)

$$A\cdot n + A + B - A(1-h)n - B(1-h) = nh^2,$$

$$A\cdot h\cdot n + A + B\cdot h = nh^2$$

Dvs $A\cdot h = h^2$ och $A + Bh = 0$; $A = h$, $B = -1$

Den allmänna lösningen till (**) är

$$y_n = y_n^h + y_n^p = C\cdot(1-h)^n - (1-nh).$$

$y_0 = C - 1 = 0$, Dvs $\underline{\underline{y_n = nh - 1 + (1-h)^n}}$

För $t = nh$ så är $y(t) = nh - 1 + e^{-nh} = nh - 1 + \underbrace{(e^{-h})}_{\approx 1-h+O(h)h^2}{}^n$

Dvs: $y(t) \approx y_n$ små $h$! då $t = nh$

6. $f_n(x) = n^c x(1-x^2)^n$, $0 \le x \le 1$

$f_n(0) = f_n(1) = 0$ ($\to 0$ förstås då $n \to \infty$).

Om $0 < x < 1$ så är $0 < 1 - x^2 < 1$ och därmed är $\ln(1-x^2) < 0$,

Med $\alpha = -\ln(1-x^2)$ (obs $> 0$!) så är

$$f_n(x) = x\cdot n^c e^{n\ln(1-x^2)} = x\,\frac{n^c}{e^{\alpha n}} \to 0 \text{ då } n \to \infty$$

Dvs $f_n(x) \to 0$ punktvis i $[0,1]$.

Vi undersöker nu största värdet av $f_n(x)$ på $[0,1]$.

Sätt $g(x) = x(1-x^2)^n$, då är $g'(x) = \underbrace{(1-x^2)^{n-1}}_{>0}(1 - x^2(1+2n))$

och $g'(x) > 0$ om $x^2 < \frac{1}{1+2n}$, största värdet för $g(x)$

på $[0,1]$ antas då $x^2 = \frac{1}{1+2n}$

Dvs $\max\limits_{0 \le x \le 1} |f_n(x)| = n^c \frac{1}{\sqrt{1+2n}}\left(1 - \frac{1}{1+2n}\right)^n =$

$$= \frac{n^c}{\sqrt{1+2n}}\cdot\left(\frac{2n}{1+2n}\right)^n = \underbrace{\frac{n^c}{\sqrt{1+2n}}}_{\to 0}\ \underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n}}_{\to \frac{1}{e^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}}$$

$\to 0$ omm $\underline{\underline{c < \frac{1}{2}}}$, $\to \frac{1}{e^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ då $n \to \infty$

Härav följer att $f_n(x) \to 0$ likformigt på $[0,1]$.

Omm. $\underline{\underline{c < \frac{1}{2}}}$