MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättning F, TMA976, 28/3 2008, 14.00-18.00
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: David Heintz, 0762-721860.

Besökstider: ca 15.00 och 17.00

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

---

1. Lös differentialekvationen
$$y''' + y = x^2 \sin x.$$
(7p)

2. (a) Utveckla $\sqrt{\cos x}$ i potenser av x med resttermen $O(x^6)$.
(4p)

   (b) Beräkna
$$\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}}.$$
(4p)

3. Avgör om följande serier konvergerar eller divergerar

   (a)
$$\Sigma_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$
(3p)

   (b)
$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{n\pi}{2}) \sin(\frac{2}{n\pi})$$
(4p)

4. Sätt
$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 + x^{4n}}, \quad x \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$
Bestäm alla intervall $[a, b]$ där $a < b$ sådana att funktionsföljden $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt på $[a, b]$.
(7p)

5. Ur en jättehög med godispåskägg tar Lisa och Lasse ägg. De startar båda med noll ägg och tar varannan gång. Lisa tar först ett ägg och sedan tar Lasse två ägg. De fortsätter sedan att ta ägg enligt formeln.

   - Lisa tar tre gånger så många ägg som Lasse totalt tagit plus lika många ägg som hon tog förra gången,
   - Lasse tar två gånger så många ägg som Lisa totalt tagit.

   Hur många ägg har Lasse tagit då han tagit ägg n gånger.

   (7p)

6. Lös differentialekvationen
$$\begin{cases} y'' = yy', \\ y(1) = -2,\ y'(1) = 2. \end{cases}$$

   (8p)

7. Bevisa satsen om potensseriers konvergens.

   (8p)

8. Antag att $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \ldots$. Visa att om $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar så gäller
$$\lim_{n \to \infty} n a_n = 0. \tag{1}$$
   Visa att (1) är ett nödvändigt men inte tillräckligt villkor för att $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ ska konvergera.

   (8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK

MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Lösningsförslag till
Tentamen i Matematisk analys, fortsättning F, TMA976, 2008-03-28

---

1. Lös differentialekvationen

$$y''' + y = x^2 \sin x.$$

Lösning: Karakteristiska polynomet

$$r^3 + 1 = (r+1)(r^2 - r + 1) = (r+1)(r - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(r - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

ger homogenlösningen

$$y_h(x) = Ae^{-x} + Be^{\frac{x}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + Ce^{\frac{x}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x).$$

En partikulärlösning $y_p(x)$ kan fås som $\mathrm{Im}[z_p(x)]$ där $z_p(x)$ är en partikulärlösning till

$$z''' + z = x^2 e^{ix}.$$

Ansätt $z_p(x) = u(x)e^{ix}$. Förskjutningsregeln ger ger

$$e^{ix}[(D+i)^3 + 1]u(x) = [D^3 + 1](u(x)e^{ix}) = x^2 e^{ix}.$$

Vi får $[(D+i)^3 + 1]u(x) = x^2$, dvs $[D^3 + 3iD^2 - 3D - i + 1]u(x) = x^2$.
Ansätt $u(x) = Ex^2 + Fx + G$. Insättning i differentialekvationen ger

$$3i \cdot 2E - 3(2Ex + F) + (1-i)(Ex^2 + Fx + G) = x^2,$$

dvs $E = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $F = 3i$ och $G = -\frac{3}{2} + \frac{9}{2}i$. Detta ger

$$y_p(x) = \mathrm{Im}[(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)x^2 + 3ix + (-\frac{3}{2} + \frac{9}{2}i))e^{ix}] =$$

$$= (\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2}) \cos x + (\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}) \sin x.$$

Den allmänna lösningen till den ursprungliga differentialekvationen ges av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Svar:

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^{\frac{x}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + Ce^{\frac{x}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + (\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2}) \cos x + (\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}) \sin x.$$

2. (a) Utveckla $\sqrt{\cos x}$ i potenser av x med resttermen $O(x^6)$.

Lösning: Kända utvecklingarna

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6), \quad x \to 0$$

och

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + O(t^3), \quad t \to 0$$

ger

$$\sqrt{\cos x} = \sqrt{1 + (-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6))} = 1 + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4) - \frac{1}{8}(-\frac{1}{2}x^2)^2 + O(x^6) =$$

$$= 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + O(x^6).$$

Svar:

$$\sqrt{\cos x} = 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + O(x^6).$$

(b) Beräkna

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}.$$

Lösning: Omskrivning ger

$$x^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{x-1}\ln x} = \{x = 1+t,\ x \to 1 \,\text{omm}\, t \to 0\} = e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}.$$

Maclaurinutvecklingen $\ln(1+t) = t + O(t^2)$ då $t \to 0$ ger

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{t\to 0} e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)} = \lim_{t\to 0} e^{\frac{1}{t}(t+O(t^2))} = \lim_{t\to 0} e^{1+O(t)} = e,$$

då exponentialfunktionen är en kontinuerlig funktion.
Svar:

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e.$$

Kommentar: Ett alternativ till utvecklingen av $\ln(1+t)$ ovan är att använda l'Hospitals regel på $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$ vilket ger

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

3. (a) Avgör om $\Sigma_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ konvergerar.

Lösning: Vi noterar att $(\ln n)^{\ln n} = e^{\ln n \cdot \ln(\ln n)} = n^{\ln(\ln n)}$. Då $\ln(\ln n)$ är en växande funktion som är > 1 då $n > e^e$ och $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergerar för $p > 1$ gäller att $\Sigma_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ konvergerar enligt jämförelsekriteriet.

Svar: Serien konvergerar

(b) Avgör om $\Sigma_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{n\pi}{2}) \sin(\frac{2}{n\pi})$ konvergerar.

Lösning: Vi ser att $\sin(\frac{n\pi}{2})$ är lika 0 då $n = 2k$, k positivt heltal, och lika med $(-1)^{k-1}$ då $n = 2k-1$, k positivt heltal. Serien kan då skrivas

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{n\pi}{2}) \sin(\frac{2}{n\pi}) = \Sigma_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \sin(\frac{2}{(2k-1)\pi}).$$

Sätt $a_k = \sin(\frac{2}{(2k-1)\pi})$ för $k = 1, 2, 3, \ldots$. Serien blir då $\Sigma_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$. Eftersom sinusfunktionen är strängt växande på intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$ och $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$ gäller

- $a_1 \geq a_2 \geq \ldots a_k \geq a_{k+1} \geq 0$ för alla positiva heltal k och
- $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$.

Villkoren för att använda Leibniz konvergenskriterium är uppfyllda och vi kan konstatera att serien konvergerar.

Svar: Serien konvergerar

4. Sätt

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 + x^{4n}}, \quad x \in \mathbb{R}, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Bestäm alla intervall $[a, b]$ där $a < b$ sådana att funktionsföljden $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt på $[a, b]$.

Lösning: Vi ser lätt att funktionsföljden $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergerar punktvis mot funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq \pm 1 \\ \frac{1}{2} & x = \pm 1 \end{cases}$$

för $x \in \mathbb{R}$. Här är f en funktion som är kontinuerlig för alla $x \neq \pm 1$ där den är diskontinuerlig. Enligt välkänt resultat följer att om en funktionsföljd av kontinuerliga funktioner konvergerar likformigt på ett intervall $[a, b]$ måste även gränsfunktionen vara kontinuerlig på detta intervall. Detta innebär, då varje funktion $f_n(x)$ ovan är kontinuerlig, att om $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt på intervallet $[a, b]$ kan detta varken innehålla -1 eller 1. För att nu visa att $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt på alla intervall $[a, b]$ som inte innehåller någon av punkterna ± 1 studerar vi funktinerna f_n.

Det gäller att

$$f_n'(x) = \frac{2nx^{2n-1}}{(1 + x^{4n})^2}(1 - x^{4n})$$

och

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_x(x) = 0$$

vilket ger tabellen

x		-1		0		1	
$f_n'(x)$	$+$	0	-	0	$+$	0	-
$f_n(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

Återstår att visa att funktionsföljden ovan konvergerar likformigt på att intervall $[a, b]$ som inte innehåller någon av punkterna ± 1. Vi har att betrakta tre fall:

$a < b < -1$: Här gäller

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{b^{2n}}{1+b^{4n}} = 0.$$

$-1 < a < b < 1$: För dylika intervall gäller

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \max(\frac{a^{2n}}{1+a^{4n}}, \frac{b^{2n}}{1+b^{4n}}) = 0.$$

$1 < a < b$: Här gäller

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{2n}}{1+a^{4n}} = 0.$$

Detta visar påståendet ovan.

5. Ur en jättehög med godispåskägg tar Lisa och Lasse ägg. De startar båda med noll ägg och tar varannan gång. Lisa tar först ett ägg och sedan tar Lasse två ägg. De fortsätter sedan att ta ägg enligt formeln.

   - Lisa tar tre gånger så många ägg som Lasse totalt tagit plus lika många ägg som hon tog förra gången,
   - Lasse tar två gånger så många ägg som Lisa totalt tagit.

   Hur många ägg har Lasse tagit då han tagit ägg n gånger.

Lösning: Definiera a_n, b_n, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ enligt följande.

a_n = totala antalet ägg som Lisa har efter det att hon tagit exakt n gånger

b_n = totala antalet ägg som Lasse har efter det att han tagit exakt n gånger

Enligt texten ovan gäller följande:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_n = 3b_{n-1} + (a_{n-1} - a_{n-2}) + a_{n-1} \quad n = 2, 3, 4, \ldots \\ b_0 = 0 \\ b_1 = 2 \\ b_n = 2a_n + b_{n-1}, \ n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

Vi noterar att talföljderna $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ är väldefinerade och bestäms genom att man beräknar talen i ordningen a_2, b_2, a_3, $b_3, \ldots$. Vidare följer att b_n-sekvensen satisfierar differensekvationen

$$\begin{cases} b_{n+3} - 9b_{n+2} + 3b_{n+1} - b_n = 0 \quad n = 1, 2, 3, \ldots \\ b_1 = 2 \\ b_2 = 18 \\ b_3 = 156. \end{cases}$$

Karakteristiska polynomet för differensekvationen ges av

$$P(r) = r^3 - 9r^2 + 3r - 1.$$

Via teckenstudium av funktionen $P(r)$ fås att denna har exakt ett reellt nollställe $r_1 > 3 + 2\sqrt{2}$ samt två ickereella nollställen $r_{2,3} = \rho e^{\pm \omega i}$ där $\rho > 0$ och $0 < \omega < \pi$ ($r_1 \approx 8,6672$, $r_{2,3} \approx 0,1664 \pm 0,2961i$). Den allmänna lösningen till differensekvationen ovan ges av

$$b_n = Ar_1^n + \rho^n(B\cos(n\omega) + C\sin(n\omega)),\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

där (givet r_1, ρ och ω) A, B och C bestäms av b_1, b_2 och b_3.

Svar: Se ovan

Kommentar: Beklagligtvis blev det väldigt tråkiga siffror i uppgiften vilket gjorde det omöjligt att bestämma konstanterna. Troliga orsaken till att problemet blev som det blev är att problemkonstruktören själv ätit för många påskägg.

6. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' = yy', \\ y(1) = -2,\ y'(1) = 2. \end{cases}$$

Lösning: Differentialekvationen är ickelinjär men ej separabel. Vi ser dock att

$$yy' = \frac{d}{dx}(\frac{y^2}{2})$$

varför vi får

$$\frac{d}{dx}(y' - \frac{y^2}{2}) = 0,$$

dvs det gäller att

$$y'(x) - \frac{(y(x))^2}{2} = C.$$

Villkoren $y(1) = -2$, $y'(1) = 2$ bestämmer konstanten C till 0. Differentialekvationen $y' = \frac{y^2}{2}$ är separabel och har lösningen

$$-\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{2}x + D.$$

Konstanten D bestäms av villkoret $y(1) = -2$ till 0. Detta ger svaret nedan.

Svar: $y(x) = -\frac{2}{x}$

Kommentar: Alternativt kan man (som ofta sker i mekaniken) betrakta y' som en funktion $p(y)$ av y då differentialekvationen som här inte explicit innehåller x. Det gäller att

$$y''(x) = \frac{d}{dx}p(y(x)) = p'(y)y',$$

vilket insatt i differentialekvationen ger

$$p'(y) = y$$

som är en separabel differentialekvation i den oberoende variabeln y. Fortsättningen blir som ovan.

7. Se kursboken [ELW]

8. Antag att $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \ldots$. Visa att om $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar så gäller

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0. \tag{1}$$

Visa att (1) är ett nödvändigt men inte tillräckligt villkor för att $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ ska konvergera.

Lösning: Att $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar medför att $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ och alltså gäller att följden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är en avtagande följd av ickenegativa reella tal. Vi noterar att

$$0 \leq 2na_{2n} = 2(\underbrace{a_{2n} + a_{2n} + \ldots + a_{2n}}_{n \text{ termer}}) \leq 2(a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n}) \leq 2\Sigma_{k=n+1}^{\infty} a_k \to 0$$

då $n \to \infty$ eftersom $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar. Dessutom gäller

$$0 \leq (2n+1)a_{2n+1} \leq \frac{2n+1}{2n} \cdot 2na_{2n} \to 0$$

då $n \to \infty$. Detta ger

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0.$$

Notera att med

$$b_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}, \; n = 1, 2, 3, \ldots,$$

gäller $\lim_{n\to\infty} nb_n = 0$ men $\Sigma_{n=1}^{\infty} b_n$ divergerar enligt integralkriteriet.