MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättning F, TMA976, 18/4 2009, 8.30-12.30
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Magnus Goffeng, 0762-721860.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

---

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = x\cos x\cosh x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

(8p)

2. (a) Avgör om

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - x^2y}{x^2 + 4y^2 + 4xy}$$

existerar, och i så fall beräkna det.

(4p)

(b) Beräkna

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

(4p)

3. Beräkna konvergensintervallet för potensserien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2} x^k.$$

(7p)

4. För $p > 0$ sätt

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^p}, \ x \in [0, 1].$$

   (a) För vilka $p > 0$ konvergerar f_n likformigt mot den punktvisa gränsfunktionen f på $[0, 1]$?

   (b) Avgör om $\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \int_0^1 f(x)\,dx$ då $n \to \infty$ för $p = 2$ och $p = 4$.

(7p)

5. Låt $a > 0$. Avgör om följden $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, där

$$\begin{cases} c_1 > 0 \\ c_{n+1} = \frac{1}{2}(c_n + \frac{a}{c_n}), \ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

konvergerar, och i så fall beräkna gränsvärdet.

(7p)

6. Avgör om serien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor}}{k}$$

konvergerar. Här betecknar $\lfloor s \rfloor$ det största heltal $\leq s$ där $s \in \mathbb{R}$.

(7p)

7. Formulera och bevisa Maclaurins formel.

(8p)

8. Låt $(g_n)_{n=1}^{\infty}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, vara en följd av reellvärda funktioner definierade på intervallet $[0, 1]$. Antag att $0 \leq g_{n+1} \leq g_n(x)$ för alla $x \in [0, 1]$ och alla n.

   (a) Visa att $\lim_{n \to \infty} g_n(x)$ existerar för all $x \in [0, 1]$.

   (b) Antag vidare att g_n är kontinuerliga funktioner för alla n samt att gränsfunktionen $g(x) \equiv \lim_{n \to \infty} g_n(x)$ är kontinuerlig på $[0, 1]$. Visa att g_n konvergerar likformigt mot g på $[0, 1]$.

(8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK

Lösningsförslag till TMA976 den 18/4 2009

1) Lös

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = x\cos x \cosh x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Lösning: kar ekv $r^2 - 2r + 2 = 0$ ger $r_{1,2} = 1 \pm i$

Medför $y_h(x) = Ae^x \cos x + Be^x \sin x$

Partikulär lösning $y_p'' - 2y_p' + 2y_p = \frac{x}{2}e^x \cos x + \frac{x}{2}e^{-x}\cos x$

$y_p(x) = \operatorname{Re} u_1(x) + \operatorname{Re} u_2(x)$ där

$u_1'' - 2u_1' + 2u_1 = \frac{x}{2}e^{(1+i)x}$, $u_2'' - 2u_2' + 2u_2 = \frac{x}{2}e^{(-1+i)x}$

u_1: $\left((D+1+i)^2 - 2(D+1+i) + 2\right) z_1(x) = \frac{x}{2}$ $\quad (u_1(x) = e^{(1+i)x} \cdot z_1(x))$

$(D^2 + 2iD) z_1(x) = \frac{x}{2}$

$z_1(x) = ax^2 + bx$ ger $a = -\frac{i}{8}$, $b = \frac{1}{8}$

Alltså $\operatorname{Re} u_1(x) = \operatorname{Re}\left\{\left(-\frac{i}{8}x^2 + \frac{1}{8}x\right)e^{(1+i)x}\right\} =$

$= \frac{x^2}{8}e^x \sin x + \frac{x}{8}e^x \cos x$

u_2: $\left((D-1+i)^2 - 2(D-1+i) + 2\right) z_2(x) = \frac{x}{2}$ $\quad (u_2(x) = e^{(-1+i)x} \cdot z_2(x))$

$(D^2 + (-4+2i)D + 4 - 4i) z_2(x) = \frac{x}{2}$

$z_2(x) = cx + d$ ger $c = \frac{1+i}{16}$, $d = \frac{1}{32} + \frac{1}{16}i$

Alltså $\operatorname{Re} u_2(x) = \operatorname{Re}\left\{\left(\frac{1+i}{16}x + \frac{1+2i}{32}\right)e^{(-1+i)x}\right\} =$

$= \left(\frac{1}{16}x + \frac{1}{32}\right)e^{-x}\cos x + \left(-\frac{1}{16}x - \frac{1}{16}\right)e^{-x}\sin x$

Allmänna lösningen $y(x) = y_h(x) + y_p(x) =$

$= \left(\left(A + \frac{x}{8}\right)e^x + \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{16}x\right)e^{-x}\right)\cos x +$

$+ \left(\left(B + \frac{x^2}{8}\right)e^x + \left(-\frac{1}{16} - \frac{1}{16}x\right)e^{-x}\right)\sin x$

Begynnelsevillkoren

$y(0) = 0$ ger $A + \frac{1}{32} = 0$ dvs $A = -\frac{1}{32}$

$y'(0) = 0$ ger $A + \frac{1}{8} - \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + B - \frac{1}{16} = 0$, dvs $B = -\frac{1}{16}$

Svar: $y(x) = \left(\left(-\frac{1}{32} + \frac{x}{8}\right)e^x + \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{16}x\right)e^{-x}\right)\cos x +$

$+ \left(\left(-\frac{1}{16} + \frac{x^2}{8}\right)e^x + \left(-\frac{1}{16} - \frac{1}{16}x\right)e^{-x}\right)\sin x$

2) a) $f(x,y) = \frac{x^3 - x^2y}{x^2 + 4y^2 + 4xy} = \frac{x^2(x-y)}{(x+2y)^2}$ $\quad D_f = \{(x,y) : x \neq -2y\}$

$f(x,0) = x \to 0 \ , x \to 0$

$f(x, -\frac{x}{2} + \frac{x}{2}^{3/2}) = \frac{x^3 + \frac{x^3}{2} - \frac{x}{2}^{7/2}}{x^3} \to \frac{3}{2}$ då $x \downarrow 0$. t.ex.

(vi ser att $|f|$ antar godtyckligt stora värden i

$D_f \cap B((0,0), r)$ för varje $r > 0$).

$\therefore$ Gränsvärdet existerar ej

b) $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2} \ln \cos x} = e^{\frac{1}{x^2} \ln(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4))} =$

$= e^{\frac{1}{x^2}(-\frac{x^2}{2} + O(x^4))} = e^{-\frac{1}{2} + O(x^2)} \to \frac{1}{\sqrt{e}} \ , x \to 0$

Svar: a) gränsvärdet existerar ej; b) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

3) Beräkna konvergensintervallet för $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2} x^k$

Med $a_k = \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$ gäller

$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k} \to \frac{1}{e} \ , k \to \infty$

Alltså $R = e$ (R = konvergensradien)

Vidare $\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2} \cdot e^k = \exp\left[-k^2 \ln(1+\frac{1}{k}) + k\right] =$

$= \exp\left[-k^2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} + O(\frac{1}{k^3})\right) + k\right] = e^{1 + O(\frac{1}{k})} \to e, \ k \to \infty$

Alltså $a_k e^k \not\to 0 \ , k \to \infty$

Konvergensintervallet: $(-e, e)$. : Svar

4) $p > 0$. $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^p} \ , x \in [0,1]$.

Vi ser att $f_n(x) \to f(x) = 0$ punktvis på $[0,1]$.

Beräkna $\max_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)|$. ($f_n(x) \geq 0$)

$\frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{n}{(1+n^2x^p)^2}\left[1 + n^2(1-p)x^p\right]$

Alltså

$$\max_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} f_n(1) = \frac{n}{1+n^2} & 0 < p \leq 1 \\ f_n\left(\left(\frac{1}{n^2(p-1)}\right)^{1/p}\right) = n^{1-\frac{2}{p}} \frac{\left(\frac{1}{p-1}\right)^{1/p}}{1 + \frac{1}{p-1}} & p > 1 \end{cases}$$

Vi ser att $f_n \to f$ likf på $[0,1]$ om $0 < p < 2$. då n tillr stort

Direkt kalkyl ger

$p = 2$ $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \frac{nx}{1+(nx)^2}\,dx = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{y}{1+y^2}\,dy =$

$= \frac{1}{2n} \ln(1+n^2) \to 0 = \int_0^1 f(x)\,dx \ , n \to \infty$

$p=4$: $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}\,dx = \{y = nx^2\} =$

$= \frac{1}{2}\int_0^n \frac{1}{1+y^2}\,dy \to \frac{\pi}{4} \neq \int_0^1 f(x)\,dx$, $n \to \infty$

Svar: a) $p \in (0,2)$, b) ok $p=2$, ej ok $p=4$.

5) $a>0$

$c_1 > 0$, $c_{n+1} = \frac{1}{2}(c_n + \frac{a}{c_n})$ $n=1,2,\ldots$

Vi noterar att $c_n > 0$ alla n och

$c_{n+1}^2 = \frac{1}{4}(c_n^2 + \frac{a^2}{c_n^2} + 2a)$, dvs $c_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}(c_n - \frac{a}{c_n})^2 \geq 0$.

och följdaktligen

$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{2}(c_n + \frac{a}{c_n}) - c_n = \frac{1}{2}(\frac{a}{c_n} - c_n) = \frac{a - c_n^2}{2c_n} \leq 0$

Alltså $(c_n)_{n\geq 2}^{\infty}$ är avtagande nedåt begr. och följdaktligen konvergent. Med $c = \lim_{n\to\infty} c_n$ fås

$c = \frac{1}{2}(c + \frac{a}{c})$ vilket ger $c = \sqrt{a}$ då $c \geq 0$.

6) Avgör om $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor} \frac{1}{k}$ konvergerar

Vi har

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{(-1)^{\lfloor n\rfloor}}{n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \ldots + \frac{1}{(k+1)^2-1}\right)$$

Sätt $a_k = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \ldots + \frac{1}{(k+1)^2-1}$, $k=1,2,\ldots$

Uppskattning med $\int$-kriteriet ger

$$\int_{k^2}^{(k+1)^2} \frac{1}{x}\,dx \leq a_k \leq \frac{1}{k^2} + \int_{k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{x}\,dx$$

dvs

$$2\ln(1+\tfrac{1}{k}) \leq a_k \leq \frac{1}{k^2} + \ln(1+\tfrac{2}{k})$$

Speciellt gäller

$$|a_{k+1} - a_k| \leq \max\left(\frac{1}{(k+1)^2} + \ln(1+\tfrac{2}{k+1}) - 2\ln(1+\tfrac{1}{k}),\ \frac{1}{k^2} + \ln(1+\tfrac{2}{k}) - 2\ln(1+\tfrac{1}{k+1})\right) \leq \frac{4}{k^2}, \text{ k stort}$$

Alltså $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergerar då $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{k+1} - a_k|$ konvergerar