Chalmers Tekniska Högskola
Mats Granath

Dugga i Termodynamik och statistisk fysik för F3(FTF140)

Tid och plats: Torsdagen den 24 september 2009, kl. 10-12, VM, HA1.
Hjälpmedel: Inga
Bedömning: Varje uppgift kan ge en halv eller en poäng som räknas som bonus på nuvarande läsårs tentaresultat.

Uppgifterna är inte nödvändigtvis ordnade i ökande svårighetsgrad.

Liten formelsamling

- mikrokanonisk fördelning: $P_r = 1/\Omega$
- kanonisk fördelning: $P_r = e^{-\beta E_r}/Z$
- entropin: $S = -k_B \sum_r P_r \ln P_r$
- Tillståndsumman: $Z = \sum_r e^{-\beta E_r}$
- Geometrisk summa: $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}$, för $x > 0$
- Entropiförändring: $dS \geq \frac{đQ}{T}$
- 1sta lagen för stationärt flöde: $\Delta h = q - w$, där q är tillförd värme och w är uttaget arbete.

Uppgift 1

Betrakta ett slutet system med endast två tillgängliga tillstånd 1 och 2. Sannoliheten att systemet befinns i respektive tillstånd ges av P_1 och P_2. Visa att systemets entropi är maximal om sannolikheterna är fördelade enligt mikrokanonisk fördelning, dvs. $P_1 = P_2$.

Uppgift 2

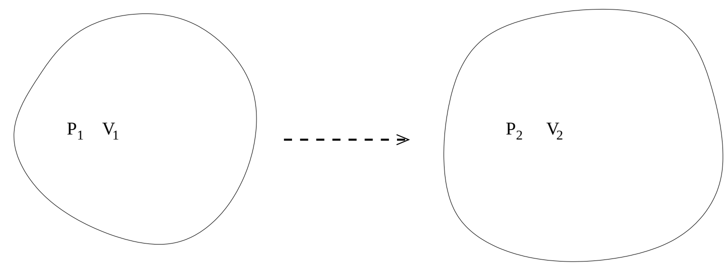
Schrödingerekvationen för en partikel i en harmonisk potential har kvanttillstånd med energier $E_n = \hbar\omega(\frac{1}{2} + n)$ där $n \geq 0$ är heltal och $\omega > 0$ är en konstant. Antag att partikeln är i kontakt med ett värmebad vid temperatur T.

a) Beräkna tillståndssumman Z för partikeln (som funktion av ω och $\beta = \frac{1}{k_B T}$).

b) Visa att väntevärdet av energin för partikeln ges av $\bar{E} = \hbar\omega(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1})$.

Uppgift 3

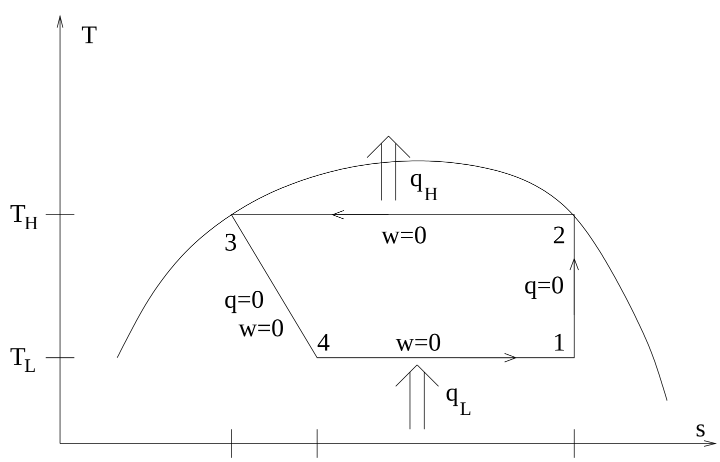
En mol av en ideal gas genomgår en förändring från ett begynnelsetillstånd med tryck P_1 i en volym V_1 till ett sluttillstånd med tryck P_2 i volym V_2. Gasen kan antas ha konstanta värmekapaciteter C_v och C_p.



a) Beräkna ändringen av gasens entropi $\Delta S = S_2 - S_1$.

b) Visa att det följer från (a) att för en adiabatisk och reversibel process gäller $P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$, där $\gamma = C_p/C_v$.

Uppgift 4



Figuren visar en ideal kylcykel där ett kylmedium cirkulerar i ett stationärt flöde. Värmeöverföringen (q_H och q_L) kan antas reversibel.

a) I termer av i figuren givna storheter, skriv ner verkningsgraden för kylcykeln.

b) Steg 3 till 4 representerar en strypventil. Hur mycket ökar entropin i strypventilen? (Dvs. utryck $s_4 - s_3$ i termer av i figuren givna storheter.)

Chalmers Tekniska Högskola
Mats Granath

Lösningar Dugga 090924

Uppgift 1

Tag $P_1 = x$, då är $P_2 = 1 - x$, vilket ger entropin $S = -k_B f(x)$ där

$$f(x) = x \ln x + (1 - x)\ln(1 - x).$$

Vi ska alltså visa att $f(x)$ minimeras för $x = 1/2$ (i intervallet $0 \leq x \leq 1$).

$$f'(x) = \ln x + 1 - \ln(1 - x) - 1 = \ln \frac{x}{1 - x} = 0$$

för $x = 1/2$, $f''(x = 1/2) = (1/x + 1/(1-x))_{x=1/2} = 4 > 0$, alltså är $x = 1/2$ ett minimum av $f(x)$. VSV.

Uppgift 2

a) $Z = \sum_n e^{-\beta\hbar\omega(\frac{1}{2}+n)} = e^{-\beta\hbar\omega/2} \sum_n e^{-\beta\hbar\omega n}$ vilket ger

$$Z = \frac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}$$

b) $\bar{E} = -\frac{d \ln Z}{d\beta} = \frac{1}{2}\hbar\omega + \hbar\omega e^{-\beta\hbar\omega}/(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) = \hbar\omega(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1})$

Uppgift 3

a) Antag två reversibla steg, ett steg vid konstant volym till $V' = V_1$ och $P' = P_2$ följt av ett steg vid konstant tryck och använd också idealgas $PV = RT$. Detta ger

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T'} C_v dT/T + \int_{T'}^{T_2} C_p dT/T = C_v \ln(T'/T_1) + C_p \ln(T_2/T') =$$
$$C_v \ln(P_2/P_1) + C_p \ln(V_2/V_1) = C_v \ln(P_2/P_1)(V_2/V_1)^\gamma$$

b) Adiabatisk och reversibel innebär $\Delta S = 0$, från (a) följer $P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$.

Uppgift 4

a) För arbetet (från kompressorn), w, i steg 1-2 gäller $q_L + w = q_H$. Verkningsgraden (kylfaktorn) är

$$\beta = q_L/w = q_L/(q_H - q_L).$$

b) Följ entropiförändringen runt cykeln från 4 till 3, givet att värmeöverföringen är reversibel, dvs $\Delta s = q/T$ (vid konstant temperatur). $s_3 = s_4 + q_L/T_L - q_H/T_H$, vilket ger

$$s_4 - s_3 = q_H/T_H - q_L/T_L.$$