Tentamen i
ESS 010 Signaler och System E3
V-sektionen, 22 december 2006, kl 14.00–18.00

Examinator: Mats Viberg

Tentamen består av 5 uppgifter som vardera ger maximalt 10 p. För godkänd tentamen fordras ca 20 poäng. I lösningarna till uppgifterna 3-5 skall **samtliga** steg (utom triviala beräkningar) redovisas.

Ansvarig under tentamen: Mats Viberg, tel. 031 - 772 1773.

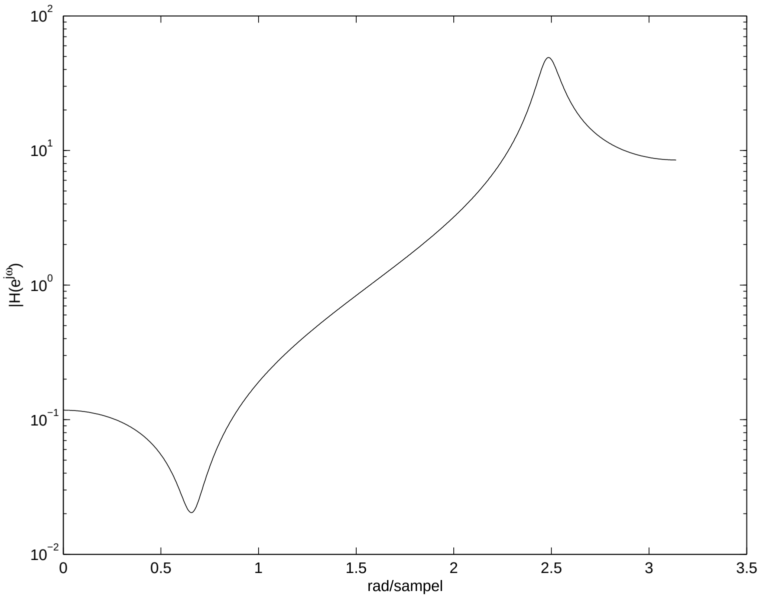
Betygslistan anslås senast den 15 januari 2007 på institutionens anslagstavla. Granskning av rättning får ske den 22 januari 2007 kl 12.30-14.00 i E-huset, rum 6439.

Tillåtna hjälpmedel:

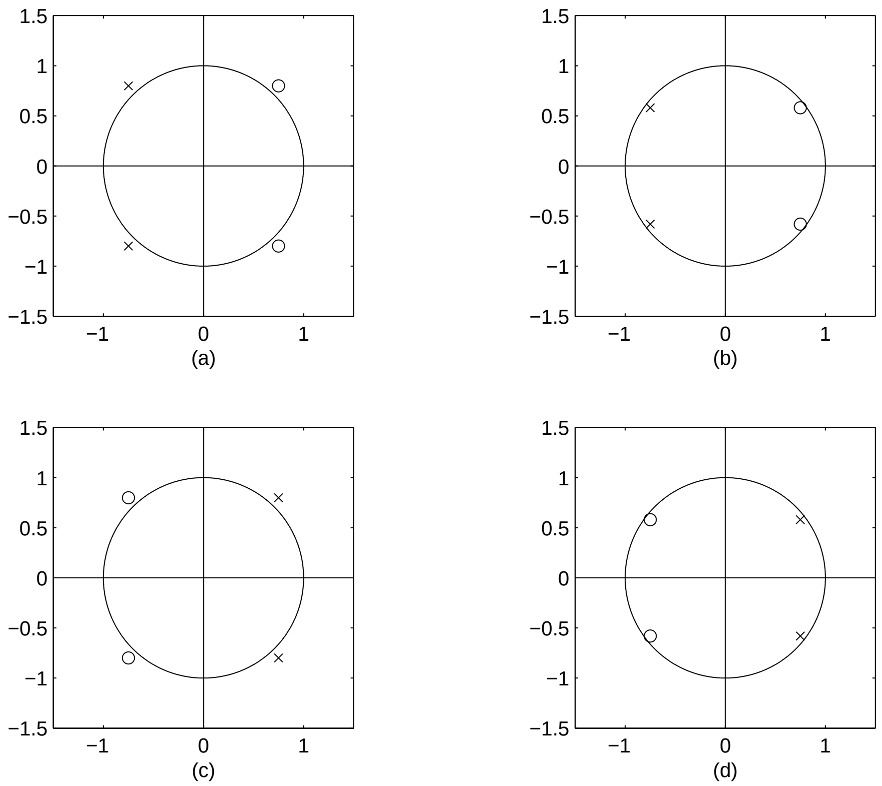
- Valfri kalkylator, dock utan färdiga program
- Formelsamling: Signaler och System E3
- Tabellverk (Beta, Standard Mathematical Tables o dyl)
- En A4-sida egna anteckningar, dock ej lösta exempel

OBS: Glöm ej tydligt skrivet namn och personnummer på varje sida samt noteringarna på försättsbladet.

Lycka till!



1. (a) I ovanstående figur visas amplitudkaraktäristiken för ett tidsdiskret filter med två poler och två nollställen. Filtret är kausalt och stabilt och har ett reellt impulssvar. Hur ser pol-nollställeplaceringen ut för filtret? Välj bland alternativ (a)-(d) i figuren nedan. Symbolen 'x' motsvarar en pol och 'o' ett nollställe. (3p)



(b) Bestäm koefficienterna i fourierserieutvecklingen av den tidsdiskreta signalen

$$x[n] = 1 - \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

(3p)

(c) Antag att ett tidskontinuerligt LTI-system har ett reellt och kausalt impulsvar $h(t)$, med frekvenssvaret $H(j\omega)$. En signal kan skrivas som en summa av en jämn och en udda del. Beteckna impulssvarets jämna del med $h_e(t)$ och beräkna dess fouriertransform $H_e(j\omega)$. Visa att

$$H_e(j\omega) = \mathrm{Re}\{H(j\omega)\}$$

dvs realdelen av systemets frekvenssvar. (4p)

2. (a) Ett tidskontinuerligt system beskrivs av sambandet

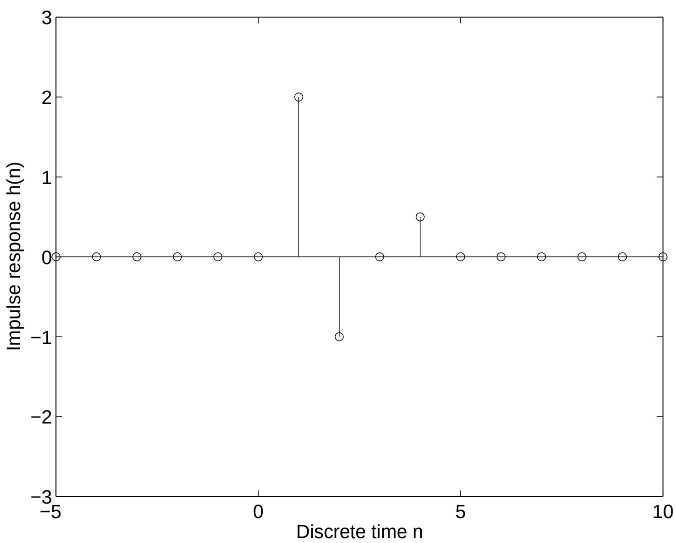
$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = \dot{x}(t) + 0.5x(t)$$

där $x(t)$ är insignal och $y(t)$ utsignal. Antag att insignalen

$$x(t) = 1 - e^{-t/2}$$

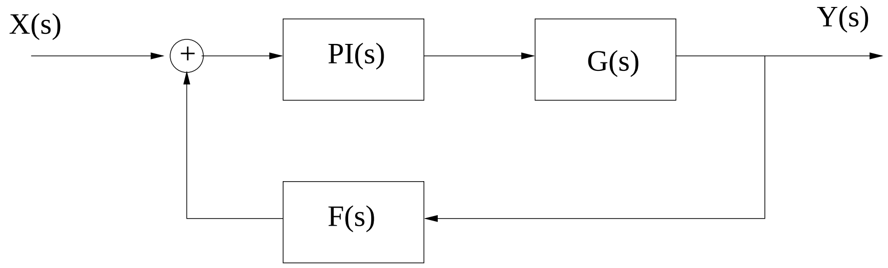
appliceras vid tiden $t = 0$, då systemet befinner sig i vila. Bestäm systemets utsignal $y(t)$. (5p)

(b) Nedanstående figur visar impulssvaret till ett digitalt filter



Bestäm filtrets amplitud- och fas-karaktäristik, samt avgör om filtret har linjär fas. (5p)

3. Systemet i nedanstående figur visar ett reglersystem, där $x(t)$ är börvärdet som regulatorn styr efter och $y(t)$ är processens mätvärde.



De olika delarna i systemet har följande överföringsfunktioner:

$$PI(s) = K_p + K_I/s$$
$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$
$$F(s) = -2$$

(a) Bestäm överföringsfunktionen $G_{tot}(s)$ från $X(s)$ till $Y(s)$. (Tips: inför en hjälpsignal direkt efter summationen) (6p)

(b) Antag att $x(t)$ varierar som

$$x(t) = \sin(t) + 0.1\sin(10t)$$

Bestäm den stationära utsignalen $y(t)$ då $K_p = K_I = 1$. Visa först att systemet är stabilt! Om du inte har fått fram överföringsfunktionen i (a) så kan du använda

$$G_{tot}(s) = \frac{2s+1}{s^2+s+2}$$

(4p)

4. Man önskar dimensionera ett analogt lågpassfilter med 3 dB gränsfrekvens $F_c = 800$ Hz. DC-förstärkningen skall vara 0 dB. Filtrets amplitudkaraktäristik skall vara av Butterworth-typ:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^{2N}} \qquad \text{(Normaliserat filter)}$$

(a) Bestäm filtrets gradtal N så att amplitudkurvan $|H(j\omega)|$ lutar 60 dB per dekad (tio-dubbling) för $\omega \gg 1$. (2p)

(b) Bestäm filtrets överföringsfunktion så att ovanstående specifikationer uppfylls. Använd $N = 4$ om inte (a) är löst. (7p)

(c) Visa hur filtret kan realiseras genom att parallellkoppla 1:a och 2:a ordningens block genom att ange (utan räkningar) formen på blockens överföringsfunktioner. (1p)

5. Emil har fått en svart låda som sägs innehålla ett digitalt filter (LTI-system). Han får i uppgift att empiriskt bestämma frekvenskaraktäristiken hos filtret. Han applicerar därför en impuls $x[n] = \delta[n]$ som insignal och samlar in N sampel av utsignalen $y[n] = h[n],\ n = 0, 1, \ldots, N-1$. Den önskade frekvenskaraktäristiken fås sedan genom DFT av $h[n]$. För att få en uppfattning om kvaliteten på uppskattningen ber Emil sin mer analytiskt lagda vän Emilia om hjälp. Hon studerar ett enkelt exempel för att vinna insikt. Det sanna filtret antas ges av differensekvationen

$$y[n] - ay[n-1] = bx[n]$$

Sedan ställer hon följande frågor, som du skall svara på:

(a) Bestäm det sanna filtrets frekvensfunktion $H(e^{j\omega})$ och impulssvar $h[n]$. (1p)

(b) Beräkna DFT-koefficienterna $H[k]$ av impulssvaret. (3p)

(c) Beräkna felet i den approximerade frekvensfunktionen, dvs

$$E(\omega_k) = H(e^{j\omega_k}) - H[k]$$

vid DFT-frekvenserna $\omega_k,\ k = 0, 1, \ldots, N-1$. (2p)

(d) Bestäm hur många sampel N som krävs för att det maximala relativa felet

$$\max_{\omega_k} \left| \frac{E(\omega_k)}{H(e^{j\omega_k})} \right|$$

skall vara mindre än 1%. Vad händer om $|a| \to 1$? (4p)

Lösningsförslag/svar till Tentamen i ESS 010 Signaler och System E3 22 december 2006

1. (a) Spektret har en "dipp" vid $\omega \approx 0.6$ och en topp vid $\omega \approx 2.5$. Då bör vi ha ett nollställepar nära $e^{\pm j0.6}$ och ett polpar nära $e^{\pm j2.5}$. Eftersom polerna måste ligga innanför enhetscirkeln väljer vi alternativ (b)!

   (b) Signalen består endast av en DC-nivå och en grundton med $\omega_0 = \pi/3$ och $T = 2\pi/\omega_0 = 6$. Signalen är därför given som en reell Fourier-serie! För att uttrycka som en komplex Fourier-serie skriver vi om som
$$x[n] = -0.5e^{-j\pi n/3} + 1 - 0.5e^{j\pi n/3} = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 n}$$
   Alltså är $a_{-1} = a_1 = -0.5$, $a_0 = 1$, medan övriga Fourier-koefficienter är noll.

   (c) Skriv impulssvaret som
$$h(t) = \frac{h(t) + h(-t)}{2} + \frac{h(t) - h(-t)}{2} = h_e(t) + h_o(t)$$
   där
$$h_e(t) = \frac{h(t) + h(-t)}{2}$$
   är den jämna delen. Eftersom Fouriertransformen av $h(-t)$ är $H(-j\omega) = \bar{H}(j\omega)$ får vi
$$H_e(j\omega) = \frac{H(j\omega) + \bar{H}(j\omega)}{2} = \text{Re}\{H(j\omega)\}$$

2. (a) Laplace-transformering av differential-ekvationen ger
$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = sX(s) + 0.5X(s)$$

vilket ger att

$$Y(s) = \frac{s + 0.5}{s^2 + 3s + 2} X(s)$$

Insignalens transform är (se tabell)

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 0.5}$$

så utsignalen ges av

$$Y(s) = \frac{s + 0.5}{s(s^2 + 3s + 2)} - \frac{s + 0.5}{(s + 0.5)(s^2 + 3s + 2)}$$

Inverstransformera nu med hjälp av partialbråksuppdelning (handpåläggningsmetoden). Utnyttja först att $s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2)$:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s + 0.5}{s(s + 1)(s + 2)} - \frac{1}{(s + 1)(s + 2)} \\ &= \frac{0.25}{s} + \frac{0.5}{s + 1} - \frac{0.75}{s + 2} - \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{s + 2} \\ &= \frac{0.25}{s} - \frac{0.5}{s + 1} + \frac{0.25}{s + 2} \end{aligned}$$

Inverstransformering ger nu den sökta utsignalen som

$$y(t) = (0.25 - 0.5e^{-t} + 0.25e^{-2t})u(t)$$

(b) Enligt figuren ges impulssvaret av

$$h[n] = 2\delta[n - 1] - \delta[n - 2] + 0.5\delta[n - 4]$$

DTFT ger frekvensfunktionen

$$H(e^{j\Omega}) = 2e^{-j\Omega} - e^{-j2\Omega} + 0.5e^{-j4\Omega}$$

Vi söker amplitud- och faskaraktäristiken:

$$H(e^{j\Omega}) = A(\Omega)e^{j\Phi(\Omega)}$$

Amplitudkaraktäristiken får man enklast genom att utnyttja att $|H|^2 = H\bar{H}$ för ett komplext tal H. Detta ger att

$$\begin{aligned} |H(e^{j\Omega})|^2 &= (2e^{-j\Omega} - e^{-j2\Omega} + 0.5e^{-j4\Omega})(2e^{j\Omega} - e^{j2\Omega} + 0.5e^{j4\Omega}) \\ &= 5.25 - 4\cos\Omega - \cos 2\Omega + 2\cos 3\Omega \end{aligned}$$

så att

$$A(\Omega) = \sqrt{5.25 - 4\cos\Omega - \cos 2\Omega + 2\cos 3\Omega}$$

Faskaraktäristiken fås genom att dela upp $H(e^{j\Omega})$ i real- och imaginärdel:

$$H(e^{j\Omega}) = H_{re}(\Omega) + jH_{im}(\Omega)$$

där

$$H_{re}(\Omega) = 2\cos\Omega - \cos 2\Omega + 0.5\cos 4\Omega$$

och

$$H_{im}(\Omega) = -2\sin\Omega + \sin 2\Omega - 0.5\sin 4\Omega$$

Argumentet fås nu från

$$\Phi(\Omega) = \text{Arg}\{H(e^{j\Omega})\} = \begin{cases} \arctan\frac{H_{im}(\Omega)}{H_{re}(\Omega)}\ , & H_{re}(\Omega) > 0 \\ \arctan\frac{H_{im}(\Omega)}{H_{re}(\Omega)} + \pi\ , & H_{re}(\Omega) < 0 \end{cases}$$

Filtret har inte linjär fas. Koefficienterna saknar symmetri!

3. (a) Inför variabeln $Z(s)$ alldeles efter första summationen. Då fås

$$Z(s) = X(s) + F(s)Y(s)$$

Dessutom har vi att

$$Y(s) = G(s)PI(s)Z(s)$$

Sätt in uttrycket för $Z(s)$, vilket ger

$$Y(s) = G(s)PI(s)[X(s) + F(s)Y(s)]$$

Lös ut $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{G(s)PI(s)}{1 - G(s)PI(s)F(s)}X(s)$$

Den totala överföringsfunktionen är alltså

$$G_{tot}(s) = \frac{G(s)PI(s)}{1 - G(s)PI(s)F(s)}$$

Med de givna $G(s)$ och $F(s)$ fås efter förenklingar

$$G_{tot}(s) = \frac{K_p s + K_I}{s^2 + (2K_p + 1)s + 2K_I}$$

(b) Sätt nu $K_p = K_I = 1$ ovan:

$$G_{tot}(s) = \frac{s+1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s+2}$$

Sinus in ger sinus ut. Stationära utsignalen ges av

$$y(t) = A_1 \sin(t + \Phi_1) + 0.1 A_{10} \sin(10t + \Phi_{10})$$

där

$$\begin{aligned} A_1 &= |G_{tot}(j1)|\,, & \Phi_1 &= \mathrm{Arg}\{G_{tot}(j1)\} \\ A_{10} &= |G_{tot}(j10)|\,, & \Phi_{10} &= \mathrm{Arg}\{G_{tot}(j10)\} \end{aligned}$$

Amplitud- och faskaraktäristiken ges av

$$|G_{tot}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}}\,, \quad \mathrm{Arg}\{G_{tot}(j\omega)\} = -\arctan\frac{\omega}{2}$$

Vi får alltså

$$y(t) = 0.45 \sin(t - 0.46) + 0.0098 \sin(10t - 1.37)$$

4. (a) För stora ω är

$$|H(j\omega)|^2 \approx \frac{1}{\omega^{2N}}$$

så att

$$20 \log_{10} |H(j\omega)| \approx -20N \log_{10} \omega$$

Detta betyder att varje pol ger 20 dB lutning per dekad. För 60 dB lutning krävs alltså $N = 3$.

(b) Polerna till Butterworth-filtret är jämt fördelade på vänstra halvan av en cirkel med radien ω_c. För $N = 3$ fås

$$p_1 = \omega_c e^{j2\pi/3}\,, \quad p_2 = \omega_c e^{j3\pi/3}\,, \quad p_3 = \omega_c e^{j4\pi/3}$$

Gränsfrekvensen är $\omega_c = 2\pi F_c = 1600\pi$. Överföringsfunktionen fås nu som

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{K}{(s+\omega_c)(s-\omega_c e^{j2\pi/3})(s-\omega_c e^{-j2\pi/3})} \\ &= \frac{K}{(s+\omega_c)(s^2 - 2\omega_c \cos(2\pi/3)s + \omega_c^2)} \\ &= \frac{K}{(s+\omega_c)(s^2 + \omega_c s + \omega_c^2)} \end{aligned}$$

DC-förstärkningen är $|H(0)| = |K|/\omega_c^3 = 1$, välj $K = \omega_c^3$.

Svar:

$$H(s) = \frac{\omega_c^3}{(s+\omega_c)(s^2 + \omega_c s + \omega_c^2)}$$

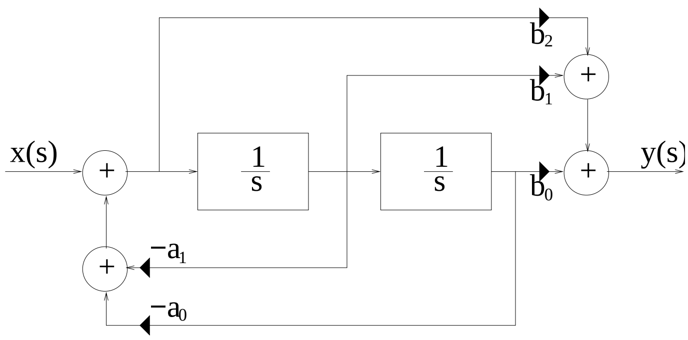
(c) Parallellkoppling innebär att utsignalen fås som summan av varje delblock:

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

Partialbråksuppdelning (ej nödvändigt för poäng på uppgiften) ger att

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c} - \frac{\omega_c s}{s^2 + \omega_c s + \omega_c^2}$$

Realisera nu varje block enligt den kanoniska formen:



För $H_1(s)$ används bara en $1/s$-burk med $a_0 = b_0 = \omega_c$ och $b_1 = 0$. För $H_2(s)$ används $a_1 = \omega_c$, $a_0 = \omega_c^2$, $b_1 = -\omega_c$ och $b_0 = b_2 = 0$.

5. (a) Det sanna filtret (i Emilias exempel) har överföringsfunktionen

$$H(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}}$$

Invers Z-transform ger impulssvaret

$$h[n] = ba^n u[n]$$

(b) Om $h[n]$ observeras för $n = 0, 1, \ldots, N-1$ så blir DFTn

$$H[k] = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-j\omega_k n}$$

där $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Med $h[n] = ba^n$ fås

$$H[k] = b \sum_{n=0}^{N-1} \left(ae^{-j\omega_k}\right)^n = b\,\frac{1 - \left(ae^{-j\omega_k}\right)^N}{1 - ae^{-j\omega_k}}$$

(c) Det sökta felet blir

$$E(\omega_k) = \frac{b}{1 - ae^{-j\omega_k}} - b\,\frac{1 - \left(ae^{-j\omega_k}\right)^N}{1 - ae^{-j\omega_k}} = \frac{b\left(ae^{-j\omega_k}\right)^N}{1 - ae^{-j\omega_k}}$$

(d) Det relativa felet blir helt enkelt

$$\frac{E(\omega_k)}{H(e^{j\omega_k})} = \left(ae^{-j\omega_k}\right)^N$$

så att

$$\left|\frac{E(\omega_k)}{H(e^{j\omega_k})}\right| = |a|^N$$

oberoende av ω_k. Förutsatt att $|a| < 1$ så går det relativa felet mot noll då $N \to \infty$. För att få felet mindre än 1% så krävs

$$|a|^N < 0.01 \;\Rightarrow\; N > \frac{2}{\log_{10}(1/|a|)}$$

T.ex. om $|a| = 0.1$ så räcker det med $N > 2$, men med $|a| = 0.99$ så krävs $N > 916$. Då $|a| \to 1$ så behövs $N \to \infty$ sampel för att få 1% noggranhet. Från detta enkla exempel drog Emilia slutsatsen att noggranheten bestäms av hur snabbt impulssvaret går mot noll, vilket i sin tur beror på var polerna är. Om det finns fler poler så är det den som är närmast enhetscirkeln som styr!