

Exempel 1

Antag ett $Po(\lambda)$ fördelat antal lotter. Varje lott vinner med sannolikheten p . Hur många ober. vinstlotter har vi?

ξ - antalet lotter

η - antalet vinstlotter.

$$\xi \sim Po(\lambda)$$

Frekvensfunktionen för ξ blir då

$$P(\xi = x) = f_{\xi}(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad ; \quad \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Givet ett utslag $x = n$ har vi n lotter.

$$\eta \sim \text{Bin}(n, p) \quad \text{--- viktigt!}$$

$$P(\eta = k / \xi = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E[\eta / \xi = n] = np$$

Detta ger

$$E[\eta] = \sum_{n=0}^{\infty} E[\eta / \xi = n] f_{\xi}(n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} np f_{\xi}(n) = p \sum_{n=0}^{\infty} n f_{\xi}(n) = p E[\xi]$$

$$= \{\text{Poisson}\} = p\lambda$$

\therefore Antalet vinstlotter är $p\lambda$.

Övning 1.5

Beräkna karakteristiska ekvationen för en $Po(\lambda)$ -förd. stokastisk variabel X .

Lsg:

$$f_X(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z} \end{array}$$

karakteristiska ekv. ges av

$$\phi_X(t) = E[e^{i2\pi t X}]$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} e^{i2\pi t x} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{i2\pi t})^x}{x!}$$

$$\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a \right\}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{i2\pi t}} = e^{\lambda(e^{i2\pi t} - 1)}$$

$$= \exp(\lambda(e^{i2\pi t} - 1))$$

Övning 2.17

Chebyshev olikheten

$$P(|X| > \varepsilon) \leq \frac{E[X^2]}{\varepsilon^2} ; \varepsilon > 0$$

Bevis

Händelse A

$$\Rightarrow A \subseteq \Omega$$

så finns det en s.v I_A givet av

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{om } \omega \in A \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

indikator variabel.

$$E[I_A] = \sum_x x P(I_A = x)$$

$$= 0 \cdot P(I_A = 0) + 1 \cdot P(I_A = 1)$$

$$= P(I_A = 1) = P(A)$$

$$P(|X| > \varepsilon) = P(X^2 > \varepsilon^2) = E[I_{\{X^2 > \varepsilon^2\}}]$$

$$\left\{ I_{\{X^2 > \varepsilon^2\}} \leq \frac{X^2}{\varepsilon^2} I_{\{X^2 > \varepsilon^2\}} \right\}$$

$$\leq E\left[\frac{X^2}{\varepsilon^2} I_{\{X^2 > \varepsilon^2\}}\right] + E\left[\frac{X^2}{\varepsilon^2} I_{\{X^2 \leq \varepsilon^2\}}\right]$$

$$= E\left[\frac{X^2}{\varepsilon^2} (I_{\{X^2 > \varepsilon^2\}} + I_{\{X^2 \leq \varepsilon^2\}})\right]$$

$$= E\left[\frac{X^2}{\varepsilon^2}\right] = \frac{1}{\varepsilon^2} E[X^2]$$



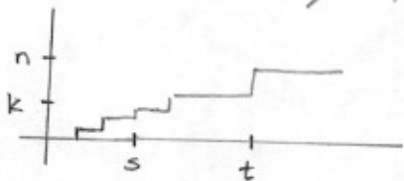
Övning 1.4

$\{X(s)\}_{s \geq 0}$ är en Poissonprocess

givet att $0 < s < t$
 $0 \leq k \leq n$

Beräkna

$$P(X(s)=k | X(t)=n) = *$$



Lsg:

$$* = \frac{P(X(s)=k, X(t)=n)}{P(X(t)=n)} = \frac{P(X(s)=k, X(t)-X(s)=n-k)}{P(X(t)=n)}$$

$$= \left\{ \text{ober. ökn.} \right\}$$

$$= \frac{P(X(s)=k) P(X(t)-X(s)=n-k)}{P(X(t)=n)}$$

$$= \frac{\frac{e^{-\lambda s} (\lambda s)^k}{k!} \frac{e^{-\lambda(t-s)} (\lambda(t-s))^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)! k!} \frac{(\lambda s)^k (\lambda(t-s))^{n-k}}{(\lambda t)^n} \sim \text{dela upp i } k \text{ och } n-k$$

$$= \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k} = P(\xi = k)$$

där $\xi \sim \text{Bin}(n, \frac{s}{t})$

Övning 3.9

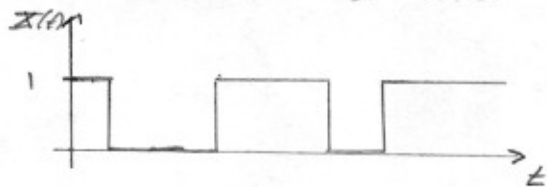
Stationära telegrafsignaler.

$$X(t) = \frac{1}{2} (1 - (-1)^{\xi + \Psi(t)})$$

där $\Psi(t)$ är en Poissonprocess och ξ är en ober. s.v.

$$\mathcal{P}(\xi=0) = \mathcal{P}(\xi=1) = \frac{1}{2}$$

Realisering av $X(t)$



Bestäm

$$m_X(t) \text{ och } r_X(t, t+\tau)$$

Lsg.:

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E[X(t)] = E\left[\frac{1}{2}(1 - (-1)^{\xi + \Psi(t)})\right] \\ &= \frac{1}{2} E[1] - \frac{1}{2} E[(-1)^{\xi + \Psi(t)}] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} E[(-1)^\xi] E[(-1)^{\Psi(t)}] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} E[(-1)^{\Psi(t)}] \left(\frac{(-1)^0}{2} + \frac{(-1)^1}{2} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$r_X(t, t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] - \frac{1}{4}$$

men

$$\begin{aligned} E[X(t)X(t+\tau)] &= \mathcal{P}(X(t)=1, X(t+\tau)=1) \\ &= \mathcal{P}\left(\frac{1}{2}(1 - (-1)^{\xi + \Psi(t)})=1, \right. \\ &\quad \left. \Psi(t+\tau) - \Psi(t) \text{ jämn} \right) \\ &= \{ \text{ober. ökn} \} \end{aligned}$$

Lekt. övning 3.9

$$P\left(\frac{1}{2}(1 - (-1)^{\Sigma + \nabla(t)} - 1)\right) P(\nabla(t+z) - \nabla(t) \text{ jämn})$$

$$= \frac{1}{2} P(\nabla(t+z) - \nabla(t) \text{ jämn}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Levy} \\ \Rightarrow \text{st. ökn.} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} P(\nabla(z) \text{ jämn})$$

$$\nabla(z) \sim \mathcal{P}_0(\lambda z)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\lambda)^{2k} e^{-2\lambda}}{(2k)!}$$

$$= \frac{e^{-2\lambda}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\lambda)^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{-2\lambda}}{2} \cosh(\lambda z)$$

Exempel 2

Låt $\{X(t)\}_{t \in T}$ vara en Poissonprocess och $t_0 \in T$ godtyckligt.

Är då $X(t)$ kont. i kvadratisk mening?

Lsg:

$$\begin{aligned} & E[(X(t) - X(t_0))^2] \\ &= \text{Var}(X(t) - X(t_0)) + E[X(t) - X(t_0)]^2 \\ &= V_X(t) - V_X(t_0) + E[X(t) - X(t_0)]^2 \\ &= V_X(t) - V_X(t_0) - 2r_X(t, t_0) + (m_X(t) - m_X(t_0))^2 \\ &= \lambda(t + t_0 - 2\min(t, t_0)) + \lambda^2(t - t_0)^2 \\ &= \lambda|t - t_0| + \lambda^2(t - t_0)^2 \rightarrow 0 \text{ då } t \rightarrow t_0 \end{aligned}$$

En Poissonprocess är kont. i kvadratisk mening.

Övning 2.23

För vilka tal $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ konv.

$$\sum \sigma_k e(k)$$

di $\{e(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ är diskret vitt brus.

Lsg:

$e(t)$ okorrulerat $\Rightarrow \text{cov}(e(k), e(n)) = 0$

$$\begin{cases} E[e(t)] = 0 \\ \text{Var}(e(t)) = \sigma^2 \end{cases}$$

$$\text{cov}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \xi_k, \sum_{l=1}^{\infty} \sigma_l \xi_l\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sigma_k \sigma_l \text{cov}(\xi_k, \xi_l) = 0$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 \text{Var}(e(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2$$

\therefore konvergens di.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 < \infty$$

Övning 3.18

Visa att en självsimilär process

$$\{X(t)\}_{t \geq 0}$$

med stationära öknings är kont. om $E[X(1)^2] < \infty$

Lsg:

Självsimilär:

$$(X(\lambda t_0), X(\lambda t_1), \dots, X(\lambda t_n))$$

$$\stackrel{D}{=} \lambda^k (X(t_0), \dots, X(t_n))$$

Stationära öknings:

$$X(t+\tau) - X(t) \stackrel{D}{=} X(\tau) - X(0)$$

En process är kont. om

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X(t+\varepsilon) = X(t) \Leftrightarrow$$

$$E[(X(t+\varepsilon) - X(t))^2] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

$$E[(X(t+\varepsilon) - X(t))^2] = \left\{ \begin{array}{l} \text{stationära} \\ \text{ökn} \end{array} \right\}$$

$$= E[(X(\varepsilon) - X(0))^2] = \left\{ \begin{array}{l} \text{självsimilär} \\ X(0) = 0 \end{array} \right\}$$

$$= E[X(\varepsilon)^2] = E[(\varepsilon^k X(1))^2]$$

$$= \varepsilon^{2k} E[X(1)^2] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{om } E[X(1)^2] < \infty.$$

Exempel 3: Moving average filter.

$\{X(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ är en s.p. för något $g \in \mathbb{N}$

så finns impulssvaret

$$h(x) = \begin{cases} 1/g & ; 0 \leq x \leq g-1 \\ 0 & ; \text{annars} \end{cases}$$

Definierar

$$\begin{aligned} Y(k) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k-l) X(l) \\ &= \frac{1}{g} \sum_{l=k-g+1}^k X(l) \end{aligned}$$

d.v.s. genomsnittet av de g senaste värdena.

om vi tar

$$c_0, c_1, \dots, c_{g-1} \in \mathbb{R}^+$$

$$\sum_{k=0}^{g-1} c_k = 1$$

$$h(x) = \begin{cases} c_x & ; 0 \leq x \leq g-1 \\ 0 & ; \text{annars} \end{cases}$$

Låt vi

$$Y(k) = \sum_{l=0}^{g-1} c_l X(k-l)$$

kallas

Weighted moving average.

Övning 2.22

(Loève kriteriet)

Visa att l.i.m. ξ_k existerar om

$\lim_{k,l \rightarrow \infty} E \left[\begin{matrix} \xi_k \\ \xi_l \end{matrix} \right]$ existerar

Lsg:

Cauchy kriteriet.

l.i.m. ξ_k existerar

om

$$\lim_{k,l \rightarrow \infty} E \left[(\xi_k - \xi_l)^2 \right] = 0$$

Antager att

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E \left[\begin{matrix} \xi_k \\ \xi_k \end{matrix} \right] = x$$

$$\lim_{k,l \rightarrow \infty} E \left[(\xi_k - \xi_l)^2 \right] = \lim_{k,l \rightarrow \infty} \left(E \left[\begin{matrix} \xi_k^2 \\ \xi_k^2 \end{matrix} \right] - 2E \left[\begin{matrix} \xi_k \\ \xi_l \end{matrix} \right] + E \left[\begin{matrix} \xi_l^2 \\ \xi_l^2 \end{matrix} \right] \right)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} E \left[\begin{matrix} \xi_k^2 \\ \xi_k^2 \end{matrix} \right] + \lim_{l \rightarrow \infty} E \left[\begin{matrix} \xi_l^2 \\ \xi_l^2 \end{matrix} \right] - 2 \lim_{k,l \rightarrow \infty} E \left[\begin{matrix} \xi_k \\ \xi_l \end{matrix} \right]$$

$$\left\{ \begin{matrix} \lim_{k \rightarrow \infty} E \left[\begin{matrix} \xi_k^2 \\ \xi_k^2 \end{matrix} \right] = x \\ \lim_{k,l \rightarrow \infty} E \left[\begin{matrix} \xi_k \\ \xi_l \end{matrix} \right] = x \end{matrix} \right\}$$

$$\Rightarrow x + x - 2x = 0$$

\therefore l.i.m. ξ_k existerar

\Downarrow

$\lim_{k,l \rightarrow \infty} E \left[\begin{matrix} \xi_k \\ \xi_l \end{matrix} \right]$ existerar.

\Downarrow

$$\lim_{k,l \rightarrow \infty} E \left[\begin{matrix} \xi_k \\ \xi_l \end{matrix} \right] = E \left[\lim_{k,l \rightarrow \infty} \begin{matrix} \xi_k \\ \xi_l \end{matrix} \right]$$



Övning 3.21

Är hagelbrus kont.?

När är hagelbrus deriverbart.

Lsg:

$$\xi_1, \xi_2, \dots$$

$$\eta_1, \eta_2, \dots$$

Exp(λ) lörd. ober. s.v.

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx < \infty$$

hagelbrus def. av

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g(t - \sum_{l=1}^k \xi_l) + \sum_{k=1}^{\infty} g(t + \sum_{l=1}^k \eta_l)$$

Hagelbrus är svagt stationärt med

$$m_X = \lambda \int_{\mathbb{R}} g(x) dx$$

$$r_X(z) = \lambda \int_{\mathbb{R}} g(x) g(x-z) dx$$

Om X är svagt stationär så är kont.

\Rightarrow Detta gäller om $g(x)$ kont.

X är deriverbart om r_X 2ggr deriverbar
 $\Leftrightarrow g(x)$ 2ggr deriverbar.

Exempel 4: Spelarens fördärvelse

En person spelar på ett kasino.
Han börjar med i dollar. I varje omgång vinner han 1 \$ med sannolikheten p , och förlorar med sannolikheten $1-p=q$.

Han avbryter då han är ruinerad eller har N \$.

Hans förmögenhet efter n omgångar är X_n . X_n är en tidshomogen Markovkedja med $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ q & 0 & p & 0 & \dots & \dots \\ 0 & q & 0 & p & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & q & 0 & p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0 och 1 är absorberande tillstånd
 \Rightarrow om vi träder ett sådant tillstånd blir vi kvar i detta.

Låt W_i vara sannolikheten att vi någonsin når tillstånd N , om vi börjar i tillstånd i .

$$\begin{aligned} \therefore W_i &= P(X_n \text{ när } N / X_0 = i) \\ &= P(X_n \text{ när } N / X_0 = i, X_1 = i+1) P_{i,i+1} \\ &\quad + P(X_n \text{ när } N / X_0 = i, X_1 = i-1) P_{i,i-1} \\ &= W_{i+1} p + W_{i-1} q \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} W_i = W_{i+1} p + W_{i-1} q \\ W_0 = 0 ; W_N = 1 \end{cases}$$

Løst eksempel 4

om skrivning ger.

$$w_{i+1} - w_i = \frac{q}{p} (w_i - w_{i-1})$$

$$\therefore w_2 - w_1 = \frac{q}{p} w_1$$

$$w_3 - w_2 = \frac{q}{p} (w_2 - w_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 w_1$$

$$w_4 - w_3 = \frac{q}{p} (w_3 - w_2) = \left(\frac{q}{p}\right)^3 w_1$$

...

$$w_n - w_{n-1} = \frac{q}{p} (w_{n-1} - w_{n-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1} w_1$$

$$w_i - w_1 = w_1 \left(\frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \left(\frac{q}{p}\right)^3 + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} \right) \Leftrightarrow$$

$$w_i = w_1 \left(\left(\frac{q}{p}\right)^0 + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} \right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 + \frac{q}{p}} & ; \text{ om } p \neq \frac{1}{2} \\ w_1 \cdot i & ; p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$w_N = 1$$

$$\begin{cases} w_i = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^n} & ; p \neq \frac{1}{2} \\ w_i = \frac{1}{N} & ; p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Övning 7.1

Bestäm utsignalen från filtret med impulssvar $h(s) = \varphi(s)$ om insignalen är ett hagelbrus med $g(x) = \varphi(x)$.

$$\varphi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}}$$

d.v.s. tätheten för $N(0,1)$ fördelningen.

Lsg:

Hagelbrus:

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g(t - \sum_{l=1}^k \xi_l) + \sum_{k=1}^{\infty} g(t + \sum_{l=1}^k \eta_l)$$

där

$t \in \mathbb{R}$, $\xi, \eta \sim \text{EXP}(\lambda)$ ober.

Filtter:

Ett filter med impulssvar $h(x)$ och insignal $X(t)$ ges av

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) X(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(t-\tau - \sum_{l=1}^k \xi_l) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(t-\tau + \sum_{l=1}^k \eta_l) \right) d\tau$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) \left(\varphi(t-\tau - \sum_{l=1}^k \xi_l) + \varphi(t-\tau + \sum_{l=1}^k \eta_l) \right) d\tau$$

Ledning:

Om ξ, η ober. s.v. så gäller

$$f_{\xi+\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(\tau) f_{\eta}(x-\tau) d\tau$$

$$P(\xi+\eta=n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(\xi=k) P(\eta=n-k)$$

Använd detta med

$$x = \begin{cases} + - \sum \xi_k \\ + + \sum \eta_k \end{cases}$$

Lekt. Övning 7.1:

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) \varphi\left(z - z - \sum_{l=1}^k \xi_l\right) dz \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) \varphi\left(z - z + \sum_{l=1}^k \eta_l\right) dz$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f_{N(0,2)}\left(z - \sum_{l=1}^k \xi_l\right)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} f_{N(0,2)}\left(z + \sum_{l=1}^k \eta_l\right) = (*)$$

Edtersom summan av två oberoende $N(0,1)$ lörd. s.v är $N(0,2)$.

introducerar

$$Y \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} Y \sim N(0,2)$$

$$\therefore F_{\sqrt{2} Y} = P(\sqrt{2} Y \leq z) = P\left(Y \leq \frac{z}{\sqrt{2}}\right) \\ = F_Y\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow f_{N(0,2)}(z) = F'_{\sqrt{2} Y}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} F'_Y\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\therefore (*) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{z - \sum_{l=1}^k \xi_l}{\sqrt{2}}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{z + \sum_{l=1}^k \eta_l}{\sqrt{2}}\right) \right)$$

Övning 5 Markovkedjor

Visa att om en Markovkedja har två stationära fördelningar π_1 och π_2 , så har den oändligt många stationära fördelningar.

$$\frac{\pi_1 + \pi_2}{2} P = \frac{\pi_1 P + \pi_2 P}{2} = \frac{\pi_1 + \pi_2}{2}$$

Detta ger

$$P\pi_1 + (1-P)\tilde{\pi}_2 \quad P \in [0,1]$$

$$(P\pi_1 + (1-P)\tilde{\pi}_2)P = P\tilde{\pi}_2 + (1-P)\tilde{\pi}_2$$

\Rightarrow Det \exists en oändlig mängd stationära fördelningar

Övning 1 Markovkedjor:

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en s.p., med värdemängd
 $S = \{0, 1, 2\}$

Vi vet att

$$P(X_{n+1}=j / X_n=i, X_{n-1}=i-1, \dots, X_0=i_0) \\ = \begin{cases} P_{ij} & \text{om } n \text{ jämn} \\ Q_{ij} & \text{om } n \text{ udda} \end{cases}$$

Processen är en Markovkedja.
Men den är inte tidshomogen.

skriv om kedjan med en
utökad värdemängd så att
den blir tidshomogen.

Lsg: värdemängd $S \times S$ där

Läter den nya värdemängden vara
 $V = S \times S$. D.v.s. alla element av typ
 (i,j) där $i,j \in S$

Definerer en ny tidsparameter m och

$$I_m = (X_{2m}, X_{2m+1})$$

$$P(I_{m+1} = (k,l) / I_m = (i,j)) = Q_{jkk} P_{kl}$$

(Observera att det står annorlunda
i ledningen, Men det kan inte vara
rätt om man definerer P och Q enligt
ovan)

Radsumman = 1 \Rightarrow Markovkedja.

$$\sum_{k,l \in S} P_{jkk} Q_{kl} = \sum_{k \in S} P_{jk} \sum_{l \in S} Q_{kl}$$

$$= \sum_{k \in S} P_{jk} = 1$$