

## Dugga i Termodynamik och statistisk fysik för F3(FTF140)

**Tid och plats:** Torsdagen den 25 september 2008, kl. 10-12, HC2, HB4.

**Hjälpmedel:** Inga

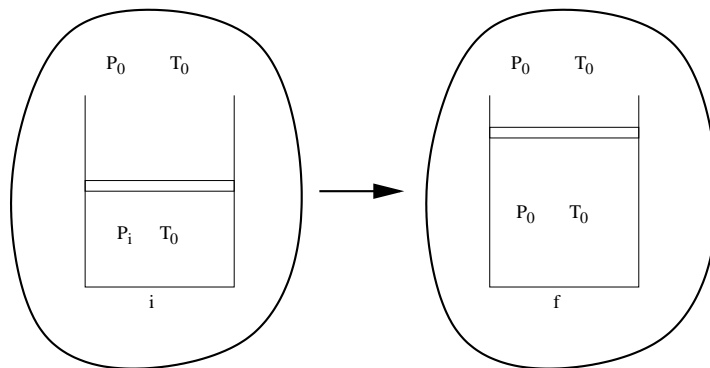
**Bedömning:** Varje uppgift kan ge en halv eller en poäng som räknas som bonus på nuvarande läsårs tentaresultat.

*Uppgifterna är inte nödvändigtvis ordnade i ökande svårighetsgrad.*

### Liten formelsamling

- Clausius-Clapeyrons ekvation:  $\frac{dP}{dT} = \frac{Q_{12}}{T(v_2 - v_1)}$
- mikrokanonisk fördelning:  $P_r = 1/\Omega$
- kanonisk fördelning:  $P_r = e^{-\beta E_r} / Z$
- entropin:  $S = -k_B \sum_r P_r \ln P_r$
- Termodynamiska identiteten:  $dE = TdS - PdV$
- Helmholtz fria energi:  $F = E - TS = -k_B T \ln Z$

### Uppgift 1



En mol av en idealgas expanderar från ett tryck  $P_i$  till ett tryck  $P_0$  i en omgivning som har konstant tryck  $P_0$ . Både gasen och omgivningen har konstant temperatur  $T_0$ . Arbetet på gasen när den expanderar i omgivningen ges av  $\dot{d}W = -P_0 dV$ .

- Beräkna ändringen av omgivningens entropi. (Denna är att betrakta som ett värmebad.)
- Beräkna ändringen av gasens entropi. (För denna beräkning väljer man en reversibel väg för vilken  $\dot{d}W = -PdV$ .)

## Uppgift 2

Ett system som är i termisk jämvikt med en omgivning vid temperatur  $T$  har fyra tillgängliga tillstånd med respektive energier  $0, \epsilon, \epsilon$  och  $2\epsilon$ , där  $\epsilon > 0$

- Vad är sannolikheten att systemet är i tillståndet med lägst energi?
- Vad är väntevärdet av systemets energi?

## Uppgift 3

Från tillståndssumman  $Z$  kan energi och tryck beräknas.

- Härled följande uttryck

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \\ P &= -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = k_B T \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_T \end{aligned} \quad (1)$$

(Med  $E$  och  $P$  menas i princip medelvärden enligt kanonisk fördelning av dessa storheter.)

Tillståndssumman för en klassisk idealgas med  $N$  partiklar med massa  $m$  ges av

$$Z = \frac{V^N}{N!} \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{3N/2}.$$

( $h$  är Plancks konstant.)

- Beräkna energi och tryck för en klassisk idealgas med hjälp av ekvation 1.

## Uppgift 4

För fasövergången mellan vätska och gas för vatten kan förångningsvärmets (per mol) approximeras genom en andragradspolynom så som

$$Q_{vg}(T) = -aT^2 + bT + c$$

där  $a, b$  och  $c$  är positiva konstanter och där temperaturen anges i  $K$ . Över ett stort temperaturintervall (ungefär  $273K < T < 550K$ ) kan den mättade gasens specifika volym approximeras  $v_g = RT/P$  och här gäller också  $v_g \gg v_v$  där  $v_v$  är den specifika volymen för den mättade vätskan.

Härled ett uttryck för ångtrycket  $P(T)$  i den mättade fasen enligt ovan givna antaganden och givet att vid temperatur  $T_0$  är trycket  $P_0$  (dvs.  $P(T_0) = P_0$ ).

## Lösningar Dugga 080925

### Uppgift 1

Idealgas:  $dT = 0 \Rightarrow dE = 0 \Rightarrow \dot{d}Q = -\dot{d}W$

a) Verkligt värmefflöde till gasen  $Q = P_0\Delta V = P_0RT_0(1/P_0 - 1/P_i)$ .

$$\Delta S_{res} = -Q/T_0 = -R(1 - P_0/P_i)$$

b) Reversibel väg och från  $dE = 0$  och  $dT = 0$   $dS = \dot{d}Q/T_0 = PdV/T_0 = -VdP/T_0 = -RdP/P$ .

$$\Delta S = -R \int_{P_i}^{P_0} dP/P = R \ln(P_i/P_0)$$

### Uppgift 2

a)  $P_{E=0} = 1/Z$  med  $Z = 1 + 2e^{-\beta\epsilon} + e^{-2\beta\epsilon}$

b)  $E = \sum_r P_r E_r = (2\epsilon e^{-\beta\epsilon} + 2\epsilon e^{-2\beta\epsilon})/Z$

### Uppgift 3

a)  $E = \sum_r E_r P_r = \frac{1}{Z} \sum_r E_r e^{-\beta E_r} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_r e^{-\beta E_r} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$

$$dF = dE - SdT - TdS = [thermo.id.] = -SdT - PdV \Rightarrow P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = k_B T \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_T$$

b)  $E = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -(3N/2) \frac{\partial \ln k_B T}{\partial \beta} = (3N/2)/\beta = (3N/2)k_B T$

$$P = k_B T \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_T = k_B T N/V$$

### Uppgift 4

Clasius Clapeyrons ekvation beskriver ändringen i ångtryck längs med koexistenskurvan mellan gas och vätska. Enligt givna förutsättningar får vi

$$\frac{dP}{dT} = \frac{Q_{vg}}{T(v_g - v_v)} = \frac{-aT^2 + bT + c}{T(RT/P)} = (P/R)(-a + b/T + c/T^2)$$

vilket ger  $dP/P = (1/R)(-a + b/T + c/T^2)dT$  och följaktligen

$$\ln P = \text{konstant} - (a/R)T + (b/R) \ln T - c/(RT) \text{ eller } P = \text{konst.}(T)^{b/R} e^{-(a/R)T - c/(RT)}.$$

$P(T_0) = P_0$  ger slutligen

$$P(T) = P_0(T/T_0)^{b/R} e^{-(a/R)(T-T_0) - (c/R)(1/T - 1/T_0)}$$