

Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 (FTF140)

Tid och plats: Onsdagen den 27 augusti 2003 kl. 8.45–12.45 i V-uset.

Examinatorer: Mikael Fogelström (tel. 772 3196), Göran Niklasson (tel. 772 3194, 070-745 4997).

Hjälpmedel för uppgifterna 1–6: Inga.

Hjälpmedel för uppgifterna 7–10: Physics Handbook, BETA, Termodynamiska tabeller (utdelade), formelblad med "Allmänna relationer för enkomponentsystem" och "Kanonisk fördelning" (utdelat), egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll (inga kopior eller maskinskrift) samt valfri räknedosa i fickformat.

Bedömning: Uppgifterna 1–6 ger högst 2 poäng vardera och uppgifterna 7–10 högst 10 poäng vardera. Poäng från inlämningsuppgifter och duggor adderas till tentamenspoängen enligt utdelad formel. För godkänt krävs 30 poäng.

Lösningar: Anslås på entrédörren till trapphuset omedelbart efter skrivningens slut.

Rättningsprotokoll: Anslås i entréhallen Fysik senast måndagen den 8 september.

Rättningsgranskning: Onsdagen den 10 september kl. 12.00–13.00 i rum 7112B i Origohusets norra flygel (Göran Niklassons tjänsterum).

1. För alla gaser gäller att den isobariska värmekapaciteten C_p större än den isokoriska värmekapaciteten C_v . Ge en enkel fysikalisk förklaring till detta!
2. Att energin E är en viktig storhet i termodynamiken är väl uppenbart för alla, men man inför också ett antal andra energifunktioner som man kallar "termodynamiska potentialer". De vanligaste är F , H och G :

$$F = E - TS$$

$$H = E + pV$$

$$G = E - TS + pV$$

Varför är det lämpligt att införa dessa tillståndsfunktioner? Förklara antingen genom ett allmänt resonemang eller genom att ge några exempel på tillämpningar där de termodynamiska potentialerna är praktiskt användbara.

3. En värmemotor är en apparat som tar in värme från en värmekälla, omvandlar en del av den till arbete och avlämnar återstoden till en kylare. Vad händer under processen med entropierna för värmekällan, kylaren och universum som helhet? Ange för vart och ett av dessa tre system om dess entropi ökar, minskar eller förblir konstant
 - (a) om processen i värmemotorn är en ideal carnotprocess?
 - (b) om processen är en ideal otto-process?

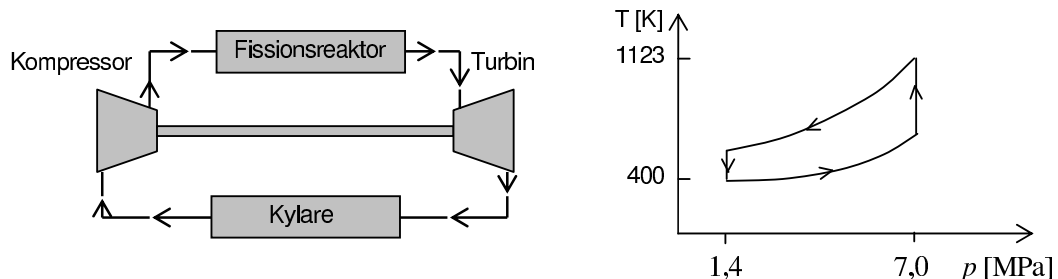
Att processerna är ideala innebär att alla delprocesser är reversibla och att alla sorters förluster (friktion, pumparbete m.m.) försummas. Observera att systemet "universum som helhet" inkluderar såväl värmekälla som kylare.

4. Kanonisk eller stor kanonisk ensemble? Redogör för vilka antaganden och variabler man har i respektive fall. Vilken koppling har de två ensemblerna till termodynamiken?
5. Värmekapacitet: Beskriv kort bidragen till en metalls värmekapacitet. Vilka är de karakteristiska temperaturer som avgör beteendet i ett givet temperatur intervall?
6. Bose-Einstein-kondensering: Utgående från fördelningen $n(\epsilon)$ för en Bose-Einstein gas visa schematiskt hur man kan förstå fenomenet Bose-Einstein-kondensering.
7. I Göteborgs-Posten den 12 augusti 2003 kunde man läsa att den effekt som levererats av kärnkraftverket i Ringhals minskat med ungefär 50 MW per reaktor på grund av att havsvattnet är för varmt, så att kylningen blir mindre effektiv än normalt. Enligt Sigvard Hallberg på Ringhals fungerar systemet bäst när havsvattnets temperatur är omkring 7 °C.

Enligt uppgifter från Ringhals kan reaktorn R3 som mest ge effekten 915 MW. Vi antar att detta gäller då kylvattnets temperatur är 7°C. Ångans temperatur när den går in i turbinen uppges vara 279°C. Hur mycket minskar effekten om kylvattnets temperatur höjs till 20°C? Frågan kan naturligtvis inte besvaras exakt utan detaljerad kännedom om systemets konstruktion, men gör en uppskattning baserad på vad du vet om termodynamikens allmänna lagar!

8. Kärnkraftens framtid är osäker, men utvecklingsarbete pågår ändå på många håll i världen. Ett exempel på tänkbar framtida design är ”the Gas Turbine Modulated Helium Reactor”. Det är i princip en konventionell fissionsreaktor ansluten till en gasturbin enligt nedanstående figur, men i stället för vatten använder man helium som arbetsmedium. Heliumgasen går in i kompressorn vid temperaturen 400 K och värms i reaktor till 1123 K. Trycket på turbinens ingångssida är 7,0 MPa.. På utgångssidan är trycket 1,4 MPa. Den elektriska effekt som systemet producerar är 285 MW. Beräkna
 - (a) systemets termiska verkningsgrad,
 - (b) flödet av helium genom turbinen (kg/s).

Det får antas att den process som heliumgasen genomgår är en ideal Braytoncykel, sammansatt av två adiabater och två isobarer enligt diagrammet.



9. En *klassisk* paramagnet med magnetiska momentet \mathbf{m}_B har orienteringsenergin

$$\varepsilon(\mathbf{B}) = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{m}_B = -Bm_B \cos \theta$$

i ett yttre magnetfält \mathbf{B} .

Bestäm sannolikheten $P(\theta)d\theta$, dvs sannolikheten att paramagneten är orienterad med vinkeln θ mot det yttre magnetfältet!

Vad blir väntevärdet $\langle m_B \cos \theta \rangle$?

Jämför detta med resultatet för en spinn-1/2 paramagnet!

Hur skulle du som 1800-tals fysiker reagerat på det klassiska resultatet jämfört med det du uppmätt i laboratoriet, dvs för en spinn-1/2 paramagnet?

10. I en Einstein-modell för en fast kropp har varje atom en bindingsenergi $|\varepsilon_0|$ och ett diskret spektrum med vibrationsmoder \mathbf{n} med energin $(n_x+n_y+n_z) h\nu_0$, där ν_0 är en karakteristisk frekvens och $n_i = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$. Energin per atom i mod α är alltså

$$\varepsilon_\alpha = -|\varepsilon_0| + (n_x + n_y + n_z)_\alpha h\nu_0$$

Kemiska potentialen för samma materials gasfas är

$$\mu_{\text{vap}} = kT \ln \left[\left(\frac{V}{N} \right)_{\text{vap}} \left(\frac{1}{\lambda_{th}} \right)^3 \right]$$

där $\lambda_{th} = [h^2/2\pi mkT]^{1/2}$ är den termiska deBroglie-våglängden.

Bestäm trycket vid fasövergången mellan den fasta fasen och gasfasen som funktion av ε_0 , ν_0 och T .

Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 2003-08-27

Rättningsprotokoll: Anslås i entréhallen Fysik senast måndagen den 8 september.

Rättningsgranskning: Onsdagen den 10 september kl. 12.00-13.00 i rum 7112B i Origohusets norra flygel (Göran Niklassons tjänsterum).

Lösningar till termodynamikdelen

Uppgift 1

När värme tillförs vid konstant tryck expanderar gasen och uträttar då arbete på omgivningen. En del av den tillförda värmen går åt till detta, vilket inte är fallet om volymen hålls konstant. Därför krävs mera värme för att åstadkomma en bestämd temperaturökning vid konstant tryck än vid konstant volym.

Uppgift 2

Många tillämpningar av termodynamiken handlar om energiomvandlingar. Man har ofta intresse av att veta hur mycket arbete som uträttas eller hur mycket värme som behöver tillföras vid en viss process. De termodynamiska potentialerna ger information om detta. Några exempel:

För en process som äger rum i en sluten behållare med given volym i en omgivning med given temperatur är ändringen i Helmholtz fria energi F lika med det utvinnbara arbetet.

För en process som sker under konstant tryck i stället för vid konstant volym är det Gibbs fria energi G som ger motsvarande information.

Vid processer som sker under konstant tryck är värmeförseln lika med ändringen i entalpi H .

Det arbete som en gas uträttar i en turbin är lika med ändringen i entalpi H .

Uppgift 3

(a) För en ideal carnotprocess gäller att entropin för värmekällan minskar och att entropin för kylaren ökar. Entropiminskningen för värmekällan är precis lika stor som entropiökningen för kylaren, så att entropiändringen för universum blir noll.

(b) För en ideal otto-process gäller också att entropin för värmekällan minskar och att entropin för kylaren ökar. Entropiökningen för kylaren är i detta fall större än entropiminskningen för värmekällan, vilket leder till att entropin för universum som helhet ökar.

Uppgift 7

I brist på annan information baserar vi uppskattningen på Carnots teorem, som säger att de högsta möjliga verkningsgraden för en värmemaskin är

$$\eta = 1 - \frac{T_l}{T_h}$$

där T_l och T_h är lägsta respektive högsta temperaturen under processen. I detta fall är T_h lika med ångans ingångstemperatur, d.v.s. $(279+273)$ K = 552 K. Den lägsta temperaturen T_l sätter vi lika med havsvattnets temperatur, vilken alltså blir $(7+273)$ K = 280 K i idealfallet men $(20+273)$ K = 293 K under värmeböljan. Låt oss beteckna motsvarande verkningsgrader med η_7 respektive η_{20} och beräkna förhållandet mellan dem:

$$\frac{\eta_{20}}{\eta_7} = \frac{1 - \frac{293}{552}}{1 - \frac{280}{552}} = \frac{552 - 293}{552 - 280} = \frac{259}{272} = 0,952$$

Verkningsgraden minskar alltså med 4,8 %, vilket på en produktion av 915 MW skulle innebära en minskning med 44 MW. Det stämmer ju ganska bra med påståendet i tidningen.

Svar: En rimlig uppskattning är att effektminskningen blir av storleksordningen 40 eller 50 MW.

Uppgift 8

(a) Trycken på högtryckssidan respektive lågtryckssidan är

$$p_1 = \text{trycket i kylaren} = 1,4 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$p_2 = \text{trycket i reaktorn} = 7 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

För att beräkna verkningsgraden behöver vi veta hur temperaturen ändras i de olika delprocesserna. Vi börjar därför med att bestämma temperaturerna i de fyra ”hörnen”:

$$T_1 = \text{temperaturen vid ingången till kompressorn} = 400 \text{ K}$$

$$T_2 = \text{temperaturen vid utgången från kompressorn} = ?$$

$$T_3 = \text{temperaturen vid ingången till turbinen} = 1123 \text{ K}$$

$$T_4 = \text{temperaturen vid utgången från turbinen} = ?$$

De okända T_2 och T_4 kan bestämmas ur de samband som gäller vid adiabatiska processer. En viktig storhet i det sammanhanget är förhållandet γ mellan de isobariska och isokoriska värmekapaciteterna. Helium kan med mycket god approximation behandlas som en ideal gas av enatomiga molekyler, vilket innebär att $\gamma = 1,667$. Vi finner att

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = 400 \cdot 5^{(0,667/1,667)} = 762 \text{ K}$$

$$T_4 = T_3 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = \frac{1123}{5^{(0,667/1,667)}} = 590 \text{ K}$$

Verkningsgraden är

$$\eta = \frac{w_{ut}}{q_{in}} = \frac{q_{in} - q_{ut}}{q_{in}} = 1 - \frac{q_{ut}}{q_{in}}$$

där w_{ut} är den producerade elektriska effekten $285 \cdot 10^6$ W, q_{in} är den värmeeffekt som tillförs i reaktorn och q_{ut} är den värmeeffekt som avges i kylaren. Både värmeförsel och värmeavgivning sker vid konstant tryck, och alltså gäller

$$q_{in} = \mu c_p (T_3 - T_2)$$

$$q_{ut} = \mu c_p (T_4 - T_1)$$

där c_p är den isobariska värmekapacitiviteten och μ är mängden helium som passerar per tidsenhet. Vi kan nu beräkna verkningsgraden:

$$\eta = 1 - \frac{q_{ut}}{q_{in}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(1-\gamma)/\gamma} = 1 - 5^{-0,667/1,667} = 0,4748$$

(b) Värmekapacitiviteten c_p för helium är $5,2 \cdot 10^3$ J/kg·K. Ur ovanstående ekvationer kan massflödet lätt beräknas:

$$\mu = \frac{q_{in}}{c_p (T_3 - T_2)} = \frac{W_{ut}}{\eta c_p (T_3 - T_2)} = \frac{285 \cdot 10^6}{0,4748 \cdot 5,2 \cdot 10^3 \cdot (1123 - 762)} \text{ kg/s} = 319,8 \text{ kg/s}$$

Svar: (a) 47 % (b) 320 kg/s

Uppgift 9 (endast svar)

$$P(\theta) d\theta = \frac{Bm_B e^{Bm_B \cos \theta / kT} \sin \theta}{2kT \sinh\left(\frac{Bm_B}{kT}\right)} d\theta$$

$$\langle m_B \cos \theta \rangle = m_B \left(\coth \frac{Bm_B}{kT} - \frac{kT}{Bm_B} \right)$$

$$\langle m_B \cos \theta \rangle = m_B \tanh \frac{Bm_B}{kT} \quad (\text{spin-}\frac{1}{2})$$

Uppgift 10 (endast svar)

$$p = kT \left(\frac{h\nu_0}{\lambda_{th} kT} \right)^3 e^{-\epsilon_0 / kT}$$