

**Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 (FTF140)**

**Tid och plats:** Onsdagen den 17 december 2003 kl. 8.45–12.45 i V-huset.

**Examinatorer:** Mikael Fogelström (tel. 772 3196), Göran Niklasson (tel. 772 3194, 070-745 4997).

**Hjälpmedel:** Physics Handbook, BETA, Termodynamiska tabeller (utdelade), formelblad med "Allmänna relationer för enkomponentsystem" och "Kanonisk fördelning" (utdelat), egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll (inga kopior eller maskinskrift) samt valfri räknedosa i fickformat.

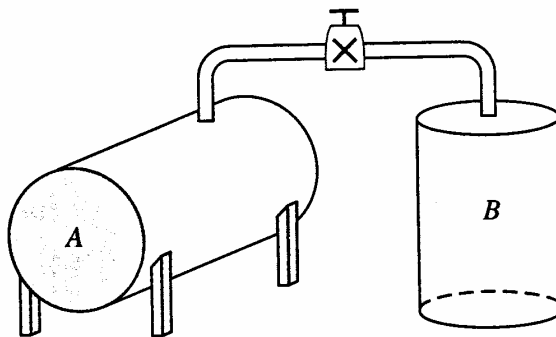
**Bedömning:** Varje uppgift ger högst 10 poäng vardera. Poäng från inlämningsuppgifter adderas till tentamenspoängen enligt utdelad formel. För godkänt krävs 30 poäng.

**Lösningar:** Anslås på entrédörren till trapphuset omedelbart efter skrivningens slut.

**Rättningsprotokoll:** Anslås i entréhallen Fysik senast fredagen den 9 januari.

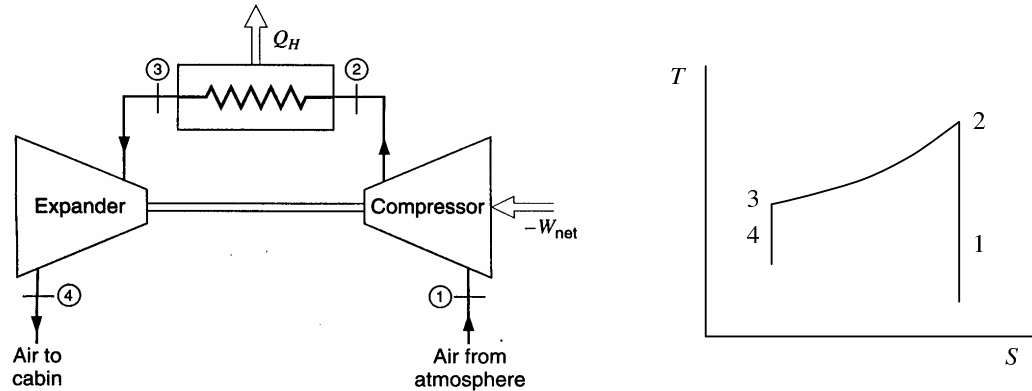
**Rättningsgranskning:** Måndagen den 19 januari kl. 12.00-13.00 i rum 6115 i Origohusets norra flygel.

1. En tank A med volymen  $0,50 \text{ m}^3$  innehåller kvävgas med temperaturen  $127^\circ\text{C}$  och trycket  $600 \text{ kPa}$ . Genom ett rör är tanken ansluten till en annan lika stor tank B, som till att börja med är tom. En kran i röret öppnas så att kvävgasen fördelar sig likformigt i båda tankarna. Båda tankarna är försedda med isolerande väggar, så att ingen nämnvärd värme överförs från omgivningen.



- (a) Vilken eller vilka av följande tillståndsfunktioner ändras inte under processen: inre energi, entalpin, Helmholtz fria energi, Gibbs fria energi? Svaret måste motiveras.
- (b) Entropin ökar under processen. Varför?
- (c) Beräkna entropiökningen under förutsättning att kvävgasen kan behandlas som en ideal gas!

2. Figuren illustrerar en vanlig princip för luftkonditionering i flygplan. Antag att luften i omgivningen har trycket 30 kPa och temperaturen  $-35\text{ }^{\circ}\text{C}$ , att den i kompressorn komprimeras till trycket 200 kPa och att den när den kommer in i kabinen har trycket 100 kPa och temperaturen  $18\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Beräkna dels det arbete  $W_{net}$  som krävs för att driva systemet, dels den värme  $Q_H$  som bortgår i kylaren (per kg luft). Den bifogade tabellen över termodynamiska egenskaper för luft kan användas, men det är också OK att lösa problemet genom att behandla luften som en ideal gas med  $C_p/C_V = 1,4$ .



3. De flesta känner nog till att grafit och diamant är två olika former av ett och samma ämne, nämligen kol. Det är också tämligen välkänt att grafit kan omvandlas till diamant vid mycket höga tryck. Vi skall här undersöka förutsättningarna för detta. I nedanstående tabell finns värden på tre olika termodynamiska storheter för grafit respektive diamant: Gibbs fria energi  $g$  per mol, specifika volymen  $v$  och isotermska kompressibiliteten  $\kappa_T$ . Alla värdena gäller vid temperaturen  $25\text{ }^{\circ}\text{C}$  och trycket 100 kPa.

	Graphite	Diamond
$g$	0	2867,8 J/mol
$v$	$444 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{kg}$	$284 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{kg}$
$\kappa_T$	$304 \cdot 10^{-15} \text{ Pa}^{-1}$	$16 \cdot 10^{-15} \text{ Pa}^{-1}$

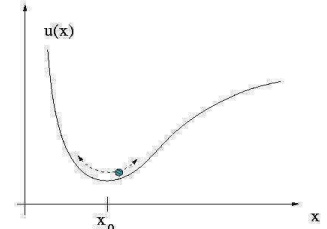
- (a) Med utgångspunkt från tabellen väntar man sig att grafit skall vara den stabila formen av kol vid rumstemperatur och atmosfärstryck. Varför?
- (b) Anta nu att vi håller temperaturen konstant vid  $25\text{ }^{\circ}\text{C}$  och successivt ökar trycket. Då komprimeras både grafit och diamant, d.v.s. deras specifika volymer minskar, men olika mycket. Bestäm specifika volymen som funktion av trycket för grafit respektive diamant under antagandet att kompressibiliteterna förblir konstanta!
- (c) Använd resultatet i deluppgift b för att bestämma Gibbs fria energi som funktion av trycket för grafit respektive diamant!
- (d) Skriv ner en ekvation som bestämmer hur högt tryck man måste applicera för att omvandla grafit till diamant! Lös ekvationen approximativt utgående från att kompressibiliteterna är små!
- (e) I deluppgift a konstaterade vi att grafit bör vara den stabila formen vid atmosfärstryck, men det är ett obestridligt faktum att diamanter existerar, och ingen oroar sig för att de plötsligt skall omvandlas till grafit. Kan du komma på någon förklaring?

4. Ge en beskrivning av vad som bestämmer en fast kropps värmekapacitet med början vid höga temperaturer och successivt sedan mot lägre temperaturer tills du når metallers värmekapacitet vid riktigt låga temperaturer. Viktigt är att ge en kort redovisning för varför  $c_V(T)$ , har det  $T$ -beroende det har i varje regim. Gör gärna en historisk reflektion över förståelsen av  $c_V(T)$ .

5. En partikel rör sig i en endimensionell potential  $u(x)$  och har energin  $E(p,x) = p^2/2m + u(x)$ . Partikeln är i termisk jämvikt med en reservoar med temperaturen  $T$ .

- (a) Visa att partikelns medelposition  $\langle x \rangle$  ges av

$$\langle x \rangle = \frac{\int x e^{-\beta u(x)} dx}{\int e^{-\beta u(x)} dx}$$



- (b) Om temperaturen är låg befinner sig partikeln mest kring potentialens minima,  $x_0$ . I detta fall kan vi serieutveckla potentialen kring  $x_0$ ,

$$u(x) = u(x_0) + (x - x_0)u'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 u''(x_0) + \frac{1}{6}(x - x_0)^3 u'''(x_0) + \dots$$

Visa nu att linjära termen måste vara noll, och att om du bara håller kvadratiska termen får du  $\langle x \rangle = x_0$ .

- (c) Värmeutvidgningskoefficienten definieras som  $\alpha = (\partial \langle x \rangle / \partial T) / \langle x \rangle$ . Det är först då den kubiska termen tas med som medelpositionen beror av  $T$  och  $\alpha$  blir skild från noll. Beräkna  $\alpha$  under antagandet att kubiska termen är liten.

- (d) I en ädelgas approximeras potentialen av en Lennard-Jones-potential

$$u(x) = u_0 \left[ \left( \frac{x_0}{x} \right)^{12} - 2 \left( \frac{x_0}{x} \right)^6 \right]$$

och för argon är  $u_0 = 0.010$  eV och  $x_0 = 3.9$  Å. Vad är då värmeutvidgningskoefficienten enligt dina beräkningar? Det uppmätta värdet för  $\alpha_{\text{argon}} = 0,0007$  K<sup>-1</sup>. Hur bra är approximationen du gjort?

6. Vita dvärgar är ett slutstadium för mindre stjärnor som har ungefär vår sols massa då de kollapsat till att ha ungefär jordens radie. Det som håller vita dvärgar stabila är en balans mellan gravitationskraften och en degenererad elektrongas tryck.

- (a) Gör en uppskattning av gravitationsenergin där du antar att massan är uniformt fördelad med täthet  $\rho$  på totala volymen. (Resultatet skall gå som  $1/R$ , där  $R$  är radien för den vita dvärgen)

- (b) Uppskatta kinetiska energin om du antar att stjärnan har en proton och en neutron per elektron samt att elektronerna är icke-relativistiska.

- (c) Finn minimum för totala energin och bestäm därmed jämviktsradien för den vita dvärgen som funktion av massan. Vad händer med radien om massan ökar och hur förklarar du det?

- (d) Temperaturen hos en typisk vit dvärg är 10 000–30 000 K. Vad är Fermitemperaturen  $T_F$  för en vit dvärg med solens massa  $2 \cdot 10^{30}$  kg? Är det korrekt att anta att elektrongasen är degenererad?

## Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 2003-12-17

**Rättningsprotokoll:** Anslås i entréhallen Fysik senast fredagen den 9 januari.

**Rättningsgranskning:** Måndagen den 19 januari kl. 12.00-13.00 i rum 6115 i Origohusets norra flygel.

## Lösningar

### Uppgift 1

(a) Den enda tillståndsfunktion som säkert förblir oförändrad är inre energin. Att den inte kan ändras följer ur första huvudsatsen. Ingen energi tillförs till systemet, varken i form av värme eller i form av arbete. Övriga tillståndsfunktioner ändras i allmänhet (för ideala gaser gäller dock att även entalpin förblir konstant).

(b) Genom att den tillgängliga volymen ökar så ökar antalet tillgängliga mikrotillstånd och därmed entropin. Ett annat sätt att argumentera är att detta är en irreversibel process. Irreversibla processer i isolerade system går alltid i sådan riktning att entropin ökar.

(c) Entropin för en ideal gas kan skrivas som

$$S(T, V) = S(T_0, V_0) + nC_V \ln \frac{T}{T_0} + nR \ln \frac{V}{V_0}$$

där  $(T_0, V_0)$  representerar ett godtyckligt valt referenstillstånd som vi kan låta vara begynnelsestillståndet i det här problemet. För en ideal gas gäller att energin bara beror av temperaturen. I det här fallet ändras inte energin, och därför ändras inte heller temperaturen. Alltså är  $T = T_0$ . Ur ideala gaslagen följer att

$$nR = \frac{p_0 V_0}{T_0}$$

Med  $V = 2V_0$  finner vi att

$$S(T, V) - S(T_0, V_0) = \frac{p_0 V_0}{T_0} \ln \frac{V}{V_0} = \frac{600 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot \ln 2}{400} \text{ J/K} = 520 \text{ J/K}$$

Svar: (a) Inre energin, (b) Antalet tillgängliga tillstånd ökar, (c) 520 J/K

### Uppgift 2

Vid öppna processer av det här slaget är värmeutbyte och nyttoarbete direkt relaterat till ändringar i entalpin  $H$ . För varje komponent (kompressor, kylare, expander) gäller att

$$\Delta H = Q - W_t$$

där  $\Delta H$  är skillnaden mellan gasens entalpier på utgångssidan och ingångssidan,  $Q$  är den tillförda värmen och  $W_t$  är det "tekniskt utvinnbara arbetet". För en turbin är  $W_t$  positivt och för en pump eller kompressor är det negativt. Vad vi behöver göra är alltså att ta reda på gasens specifika entalpi  $h$  i tillstånden 1, 2, 3 och 4.

Tillståndet 1 (begynnelsestillståndet hos den inkommande luften):

$$p_1 = 30 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

$$T_1 = -35^\circ\text{C} = 238 \text{ K}$$

$$h_1 = 220,22 + \frac{18}{20}(240,27 - 220,22) \text{ kJ/kg} = 238 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$$

Värdet på  $h_1$  är framräknat genom interpolation i tabellen men kan också erhållas ur relationen  $h = c_p T$ , där  $c_p$  hämtas ur tabell eller beräknas ur statistisk mekanik för tvåatomiga ideala gaser.

Tillståndet 4 (sluttillståndet hos den utströmmande luften):

$$P_4 = 100 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

$$T_4 = 18^\circ\text{C} = 291 \text{ K}$$

$$h_4 = 290,43 + \frac{1}{20}(300,47 - 290,43) \text{ kJ/kg} = 291 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$$

Värdet på  $h_2$  är framräknat på samma sätt som  $h_1$ .

Tillståndet 2 (mellan kompressorn och kylaren):

$$p_2 = 200 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

$$T_2 = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = 238 \cdot \left( \frac{200}{30} \right)^{0,4/1,4} \text{ K} = 409 \text{ K}$$

$$h_2 = 401,30 + \frac{9}{20}(421,59 - 401,30) \text{ kJ/kg} = 410 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$$

Temperaturen  $T_2$  erhöles ur villkoret att processen i kompressorn är adiabatisk, och  $h_2$  räknades sedan fram genom interpolation i tabellen.

Tillståndet 3 (mellan kylaren och expandern):

$$p_3 = 200 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

$$T_3 = T_4 \left( \frac{p_3}{p_4} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = 291 \cdot \left( \frac{200}{100} \right)^{0,4/1,4} \text{ K} = 355 \text{ K}$$

$$h_3 = 340,70 + \frac{15}{20}(360,86 - 340,70) \text{ kJ/kg} = 356 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$$

Temperaturen  $T_3$  erhöles ur villkoret att processen i expandern är adiabatisk, och  $h_3$  räknades sedan fram genom interpolation i tabellen.

Arbete som krävs för att driva kompressorn:  $w_{com} = h_2 - h_1 = 172 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$

Arbete som återvinns i expandern:  $w_{exp} = h_3 - h_4 = 65 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$

Nettoarbete som måste tillföras:  $w_{net} = w_{com} - w_{exp} = 107 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$

Avgiven värme i kylaren:  $q_H = h_2 - h_3 = 54 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$

Svar: Det krävs 107 kJ/kg för att driva systemet. Den i kylaren avgivna värmen är 54 kJ/kg.

### Uppgift 3

(a) Om temperatur och tryck hålls konstanta bestäms jämviktstillståndet av att Gibbs fria energi skall vara minimal. Eftersom värdet på  $g$  är lägre för grafit än för diamant är grafit den stabila formen.

(b) Kompressibiliteten definieras av uttrycket

$$\kappa_T = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$$

vilket innebär att sambandet mellan tryck och volym vid konstant temperatur bestäms av differentialekvationen

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dp} = -\kappa_T$$

Vi låter i fortsättningen  $p_0$  och  $v_0$  beteckna atmosfärstrycket respektive specifika volymen vid atmosfärstryck. Integration ger

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\kappa_T (p - p_0)$$

$$v = v_0 e^{-\kappa_T (p - p_0)}$$

Vi noterar att volymen minskar betydligt snabbare för grafit än för diamant, eftersom kompressibiliteten för grafit är ungefär 20 gånger större än för diamant.

(c) Ur definitionen av Gibbs fria energi följer att

$$\left( \frac{\partial g}{\partial p} \right)_T = v$$

Vid konstant temperatur gäller alltså att

$$g = g_0 + \int_{p_0}^p v dp = g_0 + v_0 \int_{p_0}^p e^{-\kappa_T (p - p_0)} dp = g_0 + \frac{v_0}{\kappa_T} \left[ 1 - e^{-\kappa_T (p - p_0)} \right]$$

där  $g_0$  är Gibbs fria energi vid trycket  $p_0$ .

(d) För att hålla isär grafit och diamant hänger vi på ett index  $g$  respektive  $d$ . Alltså:

$$g_g = g_{0g} + \frac{v_{0g}}{\kappa_{Tg}} \left[ 1 - e^{-\kappa_{Tg} (p - p_0)} \right]$$

$$g_d = g_{0d} + \frac{v_{0d}}{\kappa_{Td}} \left[ 1 - e^{-\kappa_{Td} (p - p_0)} \right]$$

Jämvikt uppnås när  $g_g = g_d$ :

$$g_{0g} + \frac{v_{0g}}{\kappa_{Tg}} \left[ 1 - e^{-\kappa_{Tg} (p - p_0)} \right] = g_{0d} + \frac{v_{0d}}{\kappa_{Td}} \left[ 1 - e^{-\kappa_{Td} (p - p_0)} \right]$$

Härur kan  $p$  bestämmas, men ekvationen kan inte lösas exakt utan användning av någon numerisk metod. Vi kan emellertid göra en approximation utgående från att kompressibiliteterna är små:

$$e^{-\kappa_{Tg} (p - p_0)} = 1 - \kappa_{Tg} (p - p_0)$$

$$e^{-\kappa_{Td} (p - p_0)} = 1 - \kappa_{Td} (p - p_0)$$

Detta ger

$$g_{0g} + v_{0g} (p - p_0) = g_{0d} + v_{0d} (p - p_0)$$

$$p = p_0 + \frac{g_{0d} - g_{0g}}{v_{0g} - v_{0d}} = \left[ 100 \cdot 10^3 + \frac{2,8678 \cdot 10^3}{0,012 \cdot (444 \cdot 10^{-6} - 284 \cdot 10^{-6})} \right] \text{ Pa}$$

$$= 1,50 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

[Om man vill göra en bättre approximation kan man gå till kvadratiska termer i serieutvecklingen av exponentialfunktionerna:

$$e^{-\kappa_{Tg}(p-p_0)} = 1 - \kappa_{Tg}(p-p_0) + \frac{\kappa_{Tg}^2}{2}(p-p_0)^2$$

$$e^{-\kappa_{Td}(p-p_0)} = 1 - \kappa_{Td}(p-p_0) + \frac{\kappa_{Td}^2}{2}(p-p_0)^2$$

Detta leder till en andragradsekvation för trycket:

$$(p-p_0)^2 - \frac{2(v_{0g} - v_{0d})}{\kappa_{Tg}v_{0g} - \kappa_{Td}v_{0d}}(p-p_0) + \frac{2(g_{0d} - g_{0g})}{(\kappa_{Tg}v_{0g} - \kappa_{Td}v_{0d})} = 0$$

Löser man denna så finner man  $p = 1,50 \cdot 10^9$  Pa, vilket visar att den linjära approximationen var god nog.]

(e) Diamant vid atmosfärstryck är ett "metastabilt tillstånd". Det innebär att det finns en potentialbarriär som måste övervinnas om diamant skall omvandlas till den mera stabila formen grafit. Ju högre barriären är desto längre tid tar omvandlingen. I det här fallet handlar det om astronomiskt långa tider, åtminstone vid normala temperaturer. Om diamanter hettas upp till mycket höga temperaturer sker omvandlingen snabbare.

Svar: (a) Gibbs fria energi är lägst för grafit, (b)  $v = v_0 e^{-\kappa_T(p-p_0)}$ ,

(c)  $g = g_0 + \frac{v_0}{\kappa_T} [1 - e^{-\kappa_T(p-p_0)}]$ , (d) 1,50 GPa, (e) Det finns en potentialbarriär

#### Uppgift 4

Se kurslitteraturen.

#### Uppgift 5

(a) För ett system i kontakt med en värmereservoar vid konstant temperatur T gäller den kanoniska fördelningen, d.v.s. sannolikheten att finna systemet i ett tillstånd med energin  $E$  är proportionell mot Boltzmannfaktorn  $\exp(-\beta E)$ , där  $\beta = 1/kT$ . Alltså finner vi att

$$\langle x \rangle = \frac{\int_0^\infty x dx \int_{-\infty}^\infty dp \exp\left(-\frac{\beta p^2}{2m} - \beta u(x)\right)}{\int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dp \exp\left(-\frac{\beta p^2}{2m} - \beta u(x)\right)}$$

Integralerna över  $p$  i täljare och nämnare tar ut varandra, så att resultatet blir

$$\langle x \rangle = \frac{\int_0^\infty x e^{-\beta u(x)} dx}{\int_0^\infty e^{-\beta u(x)} dx}$$

(b) För att förenkla skrivarbetet inför vi en dimensionslös variabel  $\delta$  som mått på avvikelser från jämviktssläget  $x_0$ :

$$x = (1 + \delta) x_0$$

$$\delta = \frac{x}{x_0} - 1$$

Potentialen kan då skrivas som  $u(x) = \Phi(\delta)$ , där

$$\Phi(\delta) = \Phi(0) + \Phi'(0)\delta + \frac{1}{2}\Phi''(0)\delta^2 + \frac{1}{6}\Phi'''(0)\delta^3 + \dots$$

Eftersom  $\delta=0$  svarar mot minimum i  $\Phi$  måste  $\Phi'(0)$  vara noll. Om vi försummar alla termer bortom den kvadratiska kan medelvärde på  $\delta$  beräknas enligt formeln

$$\langle \delta \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \delta e^{-\beta[\Phi(0)+\frac{1}{2}\Phi''(0)\delta^2]} d\delta}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta[\Phi(0)+\frac{1}{2}\Phi''(0)\delta^2]} d\delta}$$

där vi satt den undre gränsen till  $-\infty$ , eftersom det i denna approximation inte finns någon hård kärna som hindrar partikeln att passera origo. Detta ger uppenbarligen resultatet  $\langle \delta \rangle = 0$ , eftersom integranden i täljaren är en udda funktion av  $\delta$ . Alltså gäller i denna approximation att  $\langle x \rangle = x_0$ , oberoende av temperaturen.

(c) Om vi tar med den kubiska termen men betraktar den som en liten störning kan vi skriva Boltzmannfaktorn som

$$e^{-\beta[\Phi(0)+\frac{1}{2}\Phi''(0)\delta^2+\frac{1}{6}\Phi'''(0)\delta^3]} = e^{-\frac{\beta}{2}\Phi''(0)\delta^2} \left[ 1 - \frac{\beta}{6}\Phi'''(0)\delta^3 \right]$$

Detta ger följande uttryck för  $\langle \delta \rangle$  till lägsta ordningen i  $\Phi'''$ :

$$\begin{aligned} \langle \delta \rangle &= -\frac{\beta}{6}\Phi'''(0) \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \delta^4 e^{-\frac{\beta}{2}\Phi''(0)\delta^2} d\delta}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta}{2}\Phi''(0)\delta^2} d\delta} = -\frac{\beta}{6}\Phi'''(0) \left[ \frac{2}{\beta\Phi''(0)} \right]^2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} z^4 e^{-z^2} dz}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz} \\ &= -\frac{2\Phi'''(0)}{3\beta[\Phi''(0)]^2} \frac{3\sqrt{\pi}/4}{\sqrt{\pi}} = -\frac{\Phi'''(0)}{2\beta[\Phi''(0)]^2} \end{aligned}$$

Alltså finner vi att

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= x_0 - \frac{x_0\Phi'''(0)}{2\beta[\Phi''(0)]^2} = x_0 - \frac{x_0\Phi'''(0)kT}{2[\Phi''(0)]^2} \\ \alpha &= \frac{1}{\langle x \rangle} \frac{d\langle x \rangle}{dT} = -\frac{\Phi'''(0)k}{2[\Phi''(0)]^2 - \Phi'''(0)kT} \end{aligned}$$

(d) Med de beteckningar vi infört ovan får vi följande uttryck för Lennard-Jones-potentialen och dess derivator:

$$\begin{aligned} \Phi(\delta) &= u_0 \left[ \left( \frac{1}{1+\delta} \right)^{12} - 2 \left( \frac{1}{1+\delta} \right)^6 \right] & \Phi(0) &= -u_0 \\ \Phi'(\delta) &= 12u_0 \left[ -\left( \frac{1}{1+\delta} \right)^{13} + \left( \frac{1}{1+\delta} \right)^7 \right] & \Phi'(0) &= 0 \\ \Phi''(\delta) &= 12u_0 \left[ 13 \left( \frac{1}{1+\delta} \right)^{14} - 7 \left( \frac{1}{1+\delta} \right)^8 \right] & \Phi''(0) &= 72u_0 \\ \Phi'''(\delta) &= 168u_0 \left[ -13 \left( \frac{1}{1+\delta} \right)^{15} + 4 \left( \frac{1}{1+\delta} \right)^9 \right] & \Phi'''(0) &= -1512u_0 \end{aligned}$$

Detta ger



$$\alpha = \frac{1512u_0k^2T}{2[72u_0]^2 + 1512u_0k^2T^2} = \frac{7k}{48u_0 \left(1 + \frac{7k^2T^2}{48u_0^2}\right)}$$

Siffervärden:  $k = 1,38066 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ ,  $u_0 = 0,010 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ,  $T = 84 \text{ K}$ . Resultatet blir

$$\alpha = \frac{0,00126}{1+0,076} \text{ K}^{-1} = 0,00117 \text{ K}^{-1}$$

vilket är av rätt storleksordning men omkring 70 % högre än det uppmätta värdet. Siffran 0,076 i nämnaren ger en antydning om det numeriska fel vi gör genom serieutvecklingen av potentialen (denna term borde vi egentligen kasta bort eftersom vi redan försummat andra termer som kan väntas vara av samma storleksordning). Större delen av avvikelsen från det experimentella resultatet ligger alltså i själva modellen, vilket inte är någon överraskning. Det är tvärtom förvånansvärt att en så enkel modell landar så nära det uppmätta värdet.

Svar: 
$$\alpha = \frac{1}{\langle x \rangle} \frac{d \langle x \rangle}{dT} = - \frac{\Phi'''(0)k}{2[\Phi''(0)]^2 - \Phi'''(0)kT} = 0,0012 \text{ K}^{-1}$$

### Uppgift 6

(a) Den sammanlagda potentiella energin för gravitationskrafterna är

$$U = -\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r}_1 \int d^3\mathbf{r}_2 \frac{G\rho(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

där  $G$  är gravitationskonstanten,  $d^3\mathbf{r}_1$  och  $d^3\mathbf{r}_2$  är volymselement, och  $\rho(\mathbf{r})$  är densiteten i punkten  $\mathbf{r}$ . Integralen kan inte beräknas om man inte i detalj känner  $\rho(\mathbf{r})$ , men man kan göra en uppskattning om man noterar att avståndet  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  kan variera mellan 0 och  $2R$ , där  $R$  är stjärnans radie. Om vi ersätter  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  med mittvärdet  $R$  separeras de två volymintegralerna så att var och en av dem blir stjärnans totala massa  $M$ . Detta ger

$$U = -\frac{GM^2}{2R}$$

Om man gör det i och för sig ganska tvivelaktiga antagandet att densiteten  $\rho$  är konstant kan man ganska lätt genomföra integrationen exakt. Resultatet blir då

$$U = -\frac{3GM^2}{5R}$$

Vi använder i fortsättningen detta uttryck men håller i minnet att faktorn  $3/5$  inte får tas på alltför stort allvar.

(b) Stjärnans massa utgörs huvudsakligen av nukleoner. Antalet elektroner  $N$  antages vara hälften så stort som antalet nukleoner, vilket ger

$$N = \frac{M}{2m_p}$$

där  $m_p$  är massan hos en proton (vi försummar masskillnaden mellan protoner och neutroner). Den kinetiska energin  $K$  finns huvudsakligen hos elektronerna, som förutsätts bilda en degenererad fermigas. Det innebär att

$$K = \frac{3}{5} N \varepsilon_F = \frac{3N\hbar^2}{10m_e} \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3} = \frac{3M\hbar^2}{20m_p m_e} \left( \frac{9\pi M}{8m_p R^3} \right)^{2/3} = \frac{3^{7/3} \pi^{2/3} \hbar^2 M^{5/3}}{80m_e m_p^{5/3} R^2}$$

$$= 0,348 \frac{\hbar^2 M^{5/3}}{m_e m_p^{5/3} R^2}$$

där  $m_e$  är elektronmassan.

(c) Den totala energin blir

$$E = K + U = \frac{3^{7/3} \pi^{2/3} \hbar^2 M^{5/3}}{80m_e m_p^{5/3} R^2} - \frac{3GM^2}{5R}$$

Jämviktstillståndet bestäms av att  $E$  skall vara minimal. Den radie som svarar mot jämvikt finner vi alltså genom att derivera  $E$  med avseende på  $R$  och sätt derivatan lika med noll. Resultatet är

$$R = \frac{3^{4/3} \pi^{2/3} \hbar^2}{8m_e m_p^{5/3} GM^{1/3}} = 1,16 \frac{\hbar^2}{m_e m_p^{5/3} GM^{1/3}}$$

Om massan ökar minskar alltså radien. Det beror på att den negativa gravitationsenergin växer snabbare med massan än den positiva kinetiska energin. Det som hindrar stjärnan att kollapsa under gravitationens inverkan är elektrongasens tryck, men ju större massan är desto mer tar gravitationen över.

(d) Genom att sätta in siffrvärdena finner vi att solens radie som vit dvärg skulle bli  $R = 7,2 \cdot 10^6$  m. Antalet elektroner blir  $N = 6,0 \cdot 10^{56}$ , och fermitemperaturen blir

$$T_F = \frac{\hbar^2}{2km_e} \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{2km_e} \left( \frac{9\pi N}{4R^3} \right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{2km_e R^2} \left( \frac{9\pi N}{4} \right)^{2/3}$$

$$= 2,2 \cdot 10^9 \text{ K}$$

Stjärnans temperatur är av storleksordningen 104 K, d.v.s. mycket lägre än fermitemperaturen. Det är alltså en god approximation att betrakta elektronerna som degenererade.

Svar:

(a) Gravitationsenergin är cirka  $-\frac{3GM^2}{5R}$ ,

(b) Den kinetiska energin är cirka  $0,3 \frac{\hbar^2 M^{5/3}}{m_e m_p^{5/3} R^2}$ ,

(c) Radien blir cirka  $\frac{\hbar^2}{m_e m_p^{5/3} GM^{1/3}}$ ,

(d) Fermitemperaturen blir cirka  $2 \cdot 10^9$  K,

(e) Elektronerna är degenererade.