

Tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk fysik för F3

Tid och plats: Tisdag 21 aug 2012, kl 8.30-12.30 i "Väg och vatten"-salar.

Hjälpmedel: Physics Handbook, BETA, "Sammanfattning av kursen FTF140 Termodynamik för F3" (utdelat), Chalmersgodkänd räknare.

Jourhavande lärare: Göran Wahnström, tel. 772-3634, 076-1010523.

Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Till detta adderas eventuella duggapoäng. För godkänt krävs 20 poäng (4:a minst 30 poäng, 5:a minst 40 poäng).

Lösningar: Anslås på kurshemsidan.

Rättningsgranskning: Tisdag 4 sep 2012, kl 12:15-13.00 i S3031, 3:e våningen i byggnad Soliden.

1. En behållare innehåller luft, som från början har samma temperatur som omgivningen. Med hjälp av en rörlig kolv komprimeras luften till halva volymen. Processen sker så långsamt att den kan betraktas som isotermisk, och det arbete som uträttas på gasen vid kompressionen blir då W_1 . Därefter låter man gasen expandera tillbaks till sin ursprungliga volym, men denna gång sker processen så snabbt att den kan betraktas som adiabatisk. Processen är dock fortfarande tillräckligt långsam för att kunna anses ske kvasistatiskt. Det arbete som gasen uträttar på kolven blir då W_2 . Ange de två processerna schematiskt i ett PV-diagram samt beräkna kvoten W_2/W_1 ! Luften får behandlas som en idealgas med konstant värmekapacitet (3 translationsfrihetsgrader och 2 rotationsfrihetsgrader, dvs $f=5$).
2. Emilia vill ordna med varmvatten till sitt fritidshus och använder då en eldriven värmepump. I närheten ligger en sjö och hon utnyttjar bottenvattnet med temperaturen $+4^\circ\text{C}$ som lågtemperaturreservoar. Hon önskar varmvatten med temperaturen $+50^\circ\text{C}$. Antag att värmepumpen arbetar helt idealt. Hur mycket värmeenergi kan hon tillföra husets varmvatten per förbrukad Joule elektrisk energi? Du ska härleda ditt svar utgående från första och andra huvudsatserna och du ska illustrera energiflödena i en figur!
3. Temperaturen i nedre delen av solens kromosfär är 5000 K. Bestäm sannolikheten för att en vätemolekyl ska befinna sig i det första respektive andra vibrationsexciterade tillståndet vid denna temperatur. Nödvändiga numeriska data får tas från Physics Handbook.

4. Betrakta ett gitter av lokaliserade väteatomer vid temperaturen T . Antag att varje väteatom kan befinna sig i fyra olika tillstånd:

tillstånd	antal elektroner	energi
neutral	1	$-\epsilon_1$
positiv	0	$-\epsilon_2$
negativ	2	ϵ_2
exciterad	1	ϵ_1

- (a) Vilket värde ska kemiska potentialen för elektronerna ha för att medelantalet elektroner per väteatom ska vara 1?
- (b) Givet detta värde på kemiska potentialen, bestäm sannolikheten för att en väteatom befinner sig i ett tillstånd med precis en elektron!
5. Standardmodellen för en Fermigas är en uppsättning av fermioner som rör sig i en lådpotential, där energinivåerna ges av uttrycket

$$\epsilon_{n_x n_y n_z} = \frac{1}{2m} \left(\frac{h}{2L} \right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2); \quad n_x, n_y, n_z \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

och där $V = L^3$ är lådans volym och m fermionens massa. Man kan också anta att fermionerna rör sig under inverkan av en tre-dimensionell isotrop harmonisk oscillator potential. Motsvarande uttryck för energinivåerna är då

$$\epsilon_{n_x n_y n_z} = \left(\frac{3}{2} + n_x + n_y + n_z \right) hf; \quad n_x, n_y, n_z \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

eller

$$\epsilon_n = \left(\frac{3}{2} + n \right) hf; \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

med degenerationsgraden

$$g_n = \frac{1}{2}(n+2)(n+1)$$

Betrakta N fermioner med spinn $1/2$ som rör sig i en tre-dimensionell isotrop harmonisk potential. Bestäm tillståndstätheten $g(\epsilon)$ och härled sedan ett uttryck för fermienergin ϵ_F ! Antag att antalet fermioner är stort och att energispektrat kan betraktas som kontinuerligt. Hur ska frekvensen f väljas om man ska få samma fermienergi som för fermioner i en låda med volymen V ?

Tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk fysik för F3

Tid och plats: Tisdag 21 aug 2012

1.

$$W = - \int P dV$$

Isoterm:

$$PV = NkT \Rightarrow P = \frac{NkT}{V} \Rightarrow P = P_0 \frac{V_0}{V}.$$

$$W_1 = \int_{V_0}^{V_0/2} P_0 \frac{V_0}{V} dV = P_0 V_0 \log 2 = 0,69 P_0 V_0$$

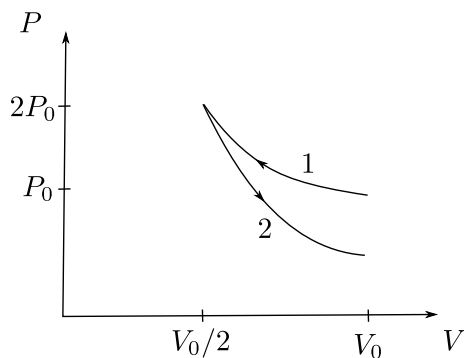
Adiabatisk process:

$$PV^\gamma = \text{konst.} \Rightarrow PV^\gamma = 2P_0(V_0/2)^\gamma \Rightarrow P = P_0 2^{1-\gamma} \frac{V_0^\gamma}{V^\gamma},$$

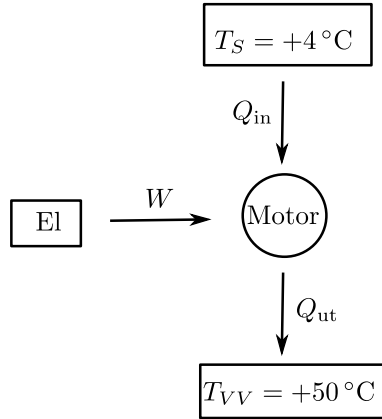
där $\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{f+2}{f} = 1,4$.

$$W_2 = \int_{V_0/2}^{V_0} P_0 2^{1-\gamma} \frac{V_0^\gamma}{V^\gamma} = \frac{P_0 V_0}{\gamma - 1} (1 - 2^{1-\gamma}) = 0,61 P_0 V_0.$$

$$\frac{W_2}{W_1} = 0,87.$$



2.



Andra huvudsatsen:

$$\Delta S_{\text{tot}} \geq 0.$$

I denna process kommer sjöns entropi minska enligt $\Delta S_S = -Q_{\text{in}}/T_S$ och varmvattnets öka enligt $\Delta S_{VV} = Q_{\text{ut}}/T_{VV}$. Vi har alltså

$$\Delta S_{\text{tot}} = \Delta S_S + \Delta S_{VV} = Q_{\text{ut}}/T_{VV} - Q_{\text{in}}/T_S \geq 0.$$

Enligt lagen om energins bevarande (första huvudsatsen) måste vi ha att $Q_{\text{ut}} = Q_{\text{in}} + W$. Vi använder detta samband för att eliminera Q_{in} ur olikheten ovan, och löser för Q_{ut} :

$$Q_{\text{ut}} \leq W \frac{T_{VV}}{T_{VV} - T_S} = W \frac{323\text{K}}{46\text{K}} = 7 \cdot W.$$

Om pumpen arbetar helt idealt så blir entropiökningen 0 och \leq ersätts av $=$. Vi får alltså 7 J värme för 1 J elektrisk energi.

3. Physics handbook, sektion 5.7:

Vibrational energy $h\nu_e = 546.68 \text{ meV}$.

Låt oss för enkelhetens skull definiera grundtillståndets energi till 0: $E_0 = 0$. De första två exciterade tillstånden får då energierna $E_1 = h\nu_e$ respektive $E_2 = 2h\nu_e$.

Sannolikheten att hitta en molekyl i tillståndet n ges av $p_n = 1/Z \exp(-\beta E_n)$, där $\beta = 1/(kT)$.

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta E_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta n h\nu_e) = \frac{1}{1 - \exp(-\beta h\nu_e)}.$$

Vi får alltså

$$p_1 = \exp(-\beta h\nu_e)(1 - \exp(-\beta h\nu_e)) = 0.20,$$

$$p_2 = \exp(-2\beta h\nu_e)(1 - \exp(-\beta h\nu_e)) = 0.06.$$

4. Sannolikheten för att vara i tillstånd i med energin E_i och N_i elektroner ges av

$$p_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta(E_i - \mu N_i)},$$

där

$$Z = \sum_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}.$$

- (a) Medelantalet kommer vara 1 om sannolikheten för att hitta 0 elektroner är lika stor som sannolikheten för att hitta 2 elektroner, d.v.s. om

$$p_{\text{positiv}} = p_{\text{negativ}} \Leftrightarrow \frac{1}{Z} e^{\beta\epsilon_2} = \frac{1}{Z} e^{-\beta(\epsilon_2 - 2\mu)} \Leftrightarrow e^{2\beta\epsilon_2} = e^{2\beta\mu} \Leftrightarrow \mu = \epsilon_2.$$

- (b) Om $\mu = \epsilon_2$ ges sannolikheten för att en atom befinner sig i ett tillstånd med precis 1 elektron av

$$\begin{aligned} p(1 \text{ elektron}) &= p_{\text{neutral}} + p_{\text{exciterad}} = \frac{e^{\beta(\epsilon_1 + \epsilon_2)} + e^{\beta(-\epsilon_1 + \epsilon_2)}}{e^{\beta(\epsilon_1 + \epsilon_2)} + e^{\beta\epsilon_2} + e^{\beta\epsilon_2} + e^{\beta(-\epsilon_1 + \epsilon_2)}} \\ &= \frac{\cosh(\beta\epsilon_1)}{\cosh(\beta\epsilon_1) + 1} \end{aligned}$$

5. Låt oss börja med att förenkla uttrycken för energinivåerna och degenerationsgraden, under det givna antagandet $N \gg 1$:

$$\epsilon_n = n\hbar f$$

$$g_n = \frac{1}{2} n^2.$$

Antalet tillstånd mellan n och $n + dn$ (där $1 \ll dn \ll n$) är $2g_n dn$, där tvåan kommer sig av att det finns två möjliga spinn för varje tillstånd i potentialen. Om vi byter variabel till ϵ måste samma antal tillstånd ges av $g(\epsilon)d\epsilon = g(\epsilon)\frac{d\epsilon}{dn}dn$. Om vi likställer dessa uttryck får vi

$$g(\epsilon) = \frac{2g_n}{\frac{d\epsilon}{dn}} = \frac{n^2}{\hbar f} = \frac{\left(\frac{\epsilon}{\hbar f}\right)^2}{\hbar f} = \frac{\epsilon^2}{(\hbar f)^3}.$$

Fermienergin ϵ_F ges av

$$N = \int_0^{\epsilon_F} g(\epsilon)d\epsilon = \frac{\epsilon_F^3}{3(\hbar f)^3} \Leftrightarrow \epsilon_F = \hbar f \sqrt[3]{3N}.$$

Fermienergin för en gas i en låda ges av

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3}.$$

Om vi likställer dessa båda uttryck för ϵ_F och löser för f får vi

$$f = \frac{\hbar}{8m} \left(\frac{3N}{\pi^2 V^2}\right)^{1/3}.$$