

Tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk fysik för F3

Tid och plats: Lördag 27 okt 2012, kl 14.00-18.00 i "V"-salar.

Hjälpmedel: Physics Handbook, BETA, ett A4-blad (2 sidor) med egna anteckningar, Chalmersgodkänd räknare.

Jourhavande lärare: Göran Wahnström, tel. 076-1010523, 031-827264.

Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Till detta adderas eventuella duggapoäng. För godkänt krävs 20 poäng (4:a minst 30 poäng, 5:a minst 40 poäng).

Lösningar: Anslås på kurshemsidan.

Rättningsgranskning: Måndag 12 nov 2012, kl 11:30-13.00 i S3031, 3:e våningen i byggnad Soliden.

1. För att bestämma värmekapaciteten för en gas genomför man följande försök. En mol av gasen, som från början har temperaturen 90°C , expanderas adiabatiskt (och kvasistatiskt) till den dubbla volymen. Därefter komprimeras den vid konstant temperatur till ursprungsvolymen. Det till omgivningen avgivna värmets värme uppmäts till 1.33 kJ. Bestäm gasens värmekapacitet c_V per mol gas! Du får anta att gasen kan behandlas som ideal med temperaturoberoende värmekapacitet. Rita också upp processen i ett PV-diagram!
2. Betrakta tre identiska system A_1 , A_2 och A_3 . Systemen har temperaturoberoende värmekapaciteter, $C = a$, där a är en konstant. Från början har systemen begynnelse-temperaturerna T_1 , T_2 respektive T_3 (i Kelvin). Vi utnyttjar nu dessa tre system för att utvinna arbete med hjälp av en värmemotor. Hur mycket arbete kan maximalt utvinnas fram till dess att systemen antagit en gemensam sluttemperatur? Vad blir sluttemperaturen? Vad blir sluttemperaturen om man inte tar ut något arbete?

Antag nu att ett av systemen, A_3 , görs mycket större så att det fungerar som en värmereservoar, dvs $C_1 = a$, $C_2 = a$ och $C_3 \rightarrow \infty$. Antag samma begynnelse-temperaturer som ovan. Vad blir nu det maximala arbete som kan utvinnas fram till dess att de två systemen och reservoaren har antagit en gemensam sluttemperatur? Vad blir sluttemperaturen? Vad blir sluttemperaturen om man inte tar ut något arbete?
3. I denna uppgift ska du bestämma fryspunkten för havsvatten. Betrakta ett lösningsmedel A (vatten) där en liten mängd ämne B (salt) upplöses. Kemiska potentialen för A kan då skrivas på formen

$$\mu_A = \mu_A^o(T, P) - kT \frac{N_B}{N_A}$$

där N_A och N_B är mängden A respektive B i lösningen, och $\mu_A^o(T, P)$ är kemiska potentialen för rent ämne A (vatten utan salt). Antag att fruset havsvatten (is) inte innehåller något salt. Visa att förändringen av fryspunkten ges av uttrycket

$$\Delta T_m = -\frac{RT_m^2}{L_m}n_B$$

där T_m är fryspunkten, R allmänna gaskonstanten, L_m smältvärmets för lösningsmedlet och n_B antal mol av det upplösta ämnet. Tillämpa sedan numeriskt på havsvatten. Antag att 1 kg havsvatten innehåller 35 g upplöst koksalt, NaCl. När NaCl löses i vatten disintegrerar saltet och det bildas Na^+ och Cl^- joner.

4. För en en-dimensionell harmonisk oscillator gäller att de kvantmekaniska energinivåerna ges av uttrycket

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Motsvarande uttryck för en tre-dimensionell isotrop harmonisk oscillator med samma vinkelfrekvens ω är

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega, \quad n_1, n_2, n_3 \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

Antag att båda oscillatorerna är i jämvikt med en temperaturresoar vid temperaturen T . För vilken temperatur blir sannolikheten densamma för att finna den en- och den tre-dimensionella oscillatoren med energin $(7/2)\hbar\omega$?

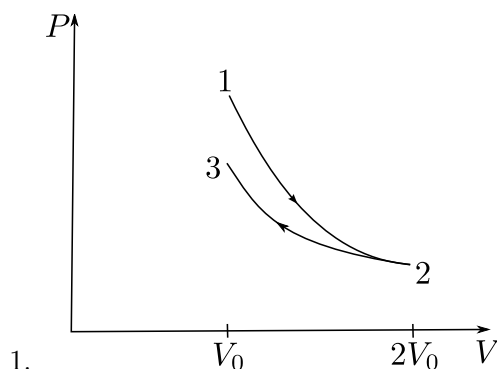
5. För en viss halvledare gäller att tillståndstätheten kan approximeras enligt

$$g(\epsilon) = \begin{cases} a_c V & \text{då } \epsilon > \epsilon_c & \text{ledningsband} \\ 0 & \text{då } \epsilon_c > \epsilon > \epsilon_v & \text{energigap} \\ a_v V & \text{då } \epsilon_v > \epsilon & \text{valensband} \end{cases}$$

där a_c och a_v är två konstanter, V systemets volym och $\Delta\epsilon_g = \epsilon_c - \epsilon_v$ bandgapet. Vid $T = 0$ är alla tillstånd i valensbandet fyllda med elektroner och ledningsbandet är tomt. Bestäm tätheten av ledningselektroner i ledningsbandet som funktion av temperaturen T . Ditt uttryck för tätheten av ledningselektroner får endast innehålla konstanterna a_c , a_v och $\Delta\epsilon_g$, samt temperaturen T och naturkonstanter. Du får anta att $|\mu - \epsilon_v| \gg kT$ och $|\mu - \epsilon_c| \gg kT$, där μ är kemiska potentialen.

Tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk fysik för F3

Tid och plats: Lördag 27 okt 2012



1. 1 → 2 isentrop

$$PV^\gamma = \text{konst.} \Rightarrow TV^{\gamma-1} = \text{konst.} \Rightarrow$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{2^{\gamma-1}}.$$

- 2 → 3 isoterm

$$W_{2 \rightarrow 3} = - \int P dV = -RT_2 \int \frac{dV}{V} = RT_2 \ln 2$$

$$\Delta T = 0 \Rightarrow \Delta U = 0 \Rightarrow W_{2 \rightarrow 3} = -Q_{2 \rightarrow 3} = Q_{\text{ut}} = 1,33 \text{ kJ}$$

$$\Rightarrow Q_{\text{ut}} = \frac{RT_1 \ln 2}{2^{\gamma-1}} \Leftrightarrow \gamma - 1 = \frac{\ln \frac{RT_1 \ln 2}{Q_{\text{ut}}}}{\ln 2} = 0.654$$

Samtidigt vet vi att

$$\begin{cases} \gamma = \frac{C_P}{C_V} \\ C_P - C_V = R \end{cases} \Rightarrow C_V = \frac{R}{\gamma - 1} = 1,53R = 12,71 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

2. Maximalt arbete då $\Delta S_{\text{tot}} = 0$. Ur detta kan man bestämma sluttemperaturen T_f

$$\Delta S_{\text{tot}} = \int_{T_1}^{T_f} \frac{CdT}{T} + \int_{T_2}^{T_f} \frac{CdT}{T} + \int_{T_3}^{T_f} \frac{CdT}{T} = a \ln \frac{T_f^3}{T_1 T_2 T_3}$$

$$\Delta S_{\text{tot}} = 0 \Leftrightarrow T_f = \sqrt[3]{T_1 T_2 T_3},$$

dvs det geometriska medelvärdet av begynnelse-temperaturerna. Arbetet som utvinns vid denna process kan man räkna ut från energikon-

servering (värme som tillförs ett system räknar vi som positiv):

$$\begin{aligned} W_{\max} = W_{\text{ut}} &= - \sum_i Q_i = - \sum_i \int_{T_i}^{T_f} C dT = a(T_1 + T_2 + T_3 - 3T_f) = \\ &= 3a \left(\frac{T_1 + T_2 + T_3}{3} - T_f \right), \end{aligned}$$

och om man drar sig till minnes att det geometriska medelvärdet är mindre än det aritmetiska så ser man att $W_{\max} \geq 0$, med likhet endast om $T_1 = T_2 = T_3$, passande nog.

Om inget arbete tas ut ($W_{\text{ut}} = 0$) så blir sluttemperaturen

$$T_f = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{3},$$

vilket tycks rimligt.

Om nu $C_3 \rightarrow \infty$ så kan tredje systemets temperatur inte ändras, och oavsett om vi tar ut arbete eller ej blir därför sluttemperaturen T_3 . Totala entropiförändringen blir nu

$$\Delta S_{\text{tot}} = \int_{T_1}^{T_3} \frac{C dT}{T} + \int_{T_2}^{T_3} \frac{C dT}{T} + \frac{Q_3}{T_3} = a \ln \frac{T_3^2}{T_1 T_2} + \frac{Q_3}{T_3}$$

Maximala arbetet ges fortfarande då $\Delta S_{\text{tot}} = 0$, dvs då

$$Q_3 = aT_3 \ln \frac{T_1 T_2}{T_3^2}.$$

Detta arbete blir

$$\begin{aligned} W_{\max} &= - \sum_i Q_i = -(a(T_3 - T_1) + a(T_3 - T_2) + Q_3) = \\ &= a \left(T_1 + T_2 - T_3 \left(2 + \ln \frac{T_1 T_2}{T_3^2} \right) \right), \end{aligned}$$

eller om man så vill

$$W_{\max} = aT_3(f(x_1) + f(x_2)), \text{ där } x_i = \frac{T_i}{T_3}$$

$$\text{och } f(x) = x - 1 - \ln x.$$

Eftersom $f(x) \geq 0, \forall x > 0$, så ser man att det maximala arbetet även här är icke-negativt (och dessutom 0 endast om $T_1 = T_2 = T_3$).

3. Jämviktsvillkor:

$$\mu_A^{\circ, \text{liquid}}(T, P) - kT \frac{N_B}{N_A} = \mu_A^{\circ, \text{solid}}(T, P).$$

Jämvikt för rent lösningsmedel:

$$\mu_A^{\circ, \text{liquid}}(T_m, P) = \mu_A^{\circ, \text{solid}}(T_m, P).$$

Både för fast och flytande kan man utveckla

$$\mu_A^{\circ}(T, P) \approx \mu_A^{\circ}(T_m, P) + \Delta T_m \frac{\partial \mu_A^{\circ}(T_m, P)}{\partial T_m} = \mu_A^{\circ}(T_m, P) - s^{\circ} \Delta T_m,$$

där $\Delta T_m = T - T_m$ och s° är entropin per molekyl. Detta ger

$$-s^{\circ, \text{liquid}} \Delta T_m - kT \frac{N_B}{N_A} = -s^{\circ, \text{solid}} \Delta T_m,$$

vilket under antagandet $T \approx T_m$ ger

$$(s^{\circ, \text{liquid}} - s^{\circ, \text{solid}}) \Delta T_m = -kT_m \frac{N_B}{N_A}.$$

Smältvärmerna för N_A partiklar ges av

$$L_m = N_A T_m (s^{\circ, \text{liquid}} - s^{\circ, \text{solid}}),$$

och förändringen av fryspunkten blir

$$\Delta T_m = -\frac{kT_m^2}{L_m} N_B = -\frac{RT_m^2}{L_m} n_B.$$

I det tillämpade fallet har vi

$$T_m = 273 \text{ K}$$

$$L_m = 333 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \text{ (heat of fusion, T - 1.5 i Physics Handbook)}$$

och

$$\begin{aligned} 35 \text{ g NaCl} &\sim 0,599 \text{ mol NaCl} \sim 1,2 \text{ mol joner} \\ \Rightarrow n_B &= 1,2 \text{ mol/kg.} \end{aligned}$$

Alltså

$$\Delta T_m = -\frac{RT_m^2}{L_m} n_B = -2,23 \text{ K.}$$

Fryspunkten sänks alltså med 2,2 grader.

4. (a) 1-dimensionell:

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$$

$$Z_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-\beta(n + 1/2)\hbar\omega\} = \frac{x^{1/2}}{1-x}, \text{ där } x = \exp\{-\beta\hbar\omega\}$$

$$P_1\left(\frac{7}{2}\hbar\omega\right) = \frac{1}{Z_1} x^{7/2}.$$

(b) 3-dimensionell:

$$\begin{aligned}
 E_{n_1, n_2, n_3} &= (n_1 + n_2 + n_3 + 3/2)\hbar\omega \\
 Z_3 &= \sum_{n_1=1}^{\infty} \exp\{-\beta(n_1 + 1/2)\hbar\omega\} \sum_{n_2} \cdots \sum_{n_3} \cdots = \\
 &= (Z_1)^3 = \left(\frac{x^{1/2}}{1-x} \right)^3.
 \end{aligned}$$

Energien $7\hbar\omega/2$ kan uppnås på 6 olika sätt (energinivån är 6-faldigt degenererad), vilket ger

$$P_3\left(\frac{7}{2}\hbar\omega\right) = \frac{1}{Z_3}6x^{7/2}.$$

Vi söker nu temperaturen där sannolikheterna är lika:

$$\begin{aligned}
 P_1 = P_3 &\Leftrightarrow \frac{1}{Z_1}x^{7/2} = \frac{1}{Z_3}6x^{7/2} \Leftrightarrow \\
 \frac{1}{Z_1} &= \frac{6}{Z_3} \text{ eller } x = 0.
 \end{aligned}$$

$x = 0 \Leftrightarrow T = 0$, vilket är en lösning. Eftersom $Z_3 = (Z_1)^3$ ges den andra lösningen av

$$\begin{aligned}
 Z_1^2 = 6 &\Leftrightarrow x = 6(1-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - \frac{13}{6}x + 1 = 0 \Leftrightarrow \\
 x &= \frac{13}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{13}{12}\right)^2 - 1} = \frac{13 \pm 5}{12}.
 \end{aligned}$$

Eftersom $x < 1$ ($\beta\hbar\omega > 0$) är bara "minus-lösningen" giltig, vilket ger

$$\begin{aligned}
 x = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} &\Leftrightarrow -\beta\hbar\omega \ln \frac{2}{3} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow T &= \frac{\hbar\omega}{k \ln \frac{3}{2}} = 2,466 \frac{\hbar\omega}{k}.
 \end{aligned}$$

5. Antal elektroner i ledningsbandet:

$$\begin{aligned}
 N_e &= \int_{\epsilon_c}^{\infty} \frac{a_c V}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} d\epsilon \approx a_c V \int_{\epsilon_c}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon-\mu)} d\epsilon = \{x = \epsilon - \epsilon_c\} = \\
 &= a_c V \int_0^{\infty} e^{-\beta(\epsilon_c-\mu)} e^{-\beta x} dx = a_c V e^{-\beta(\epsilon_c-\mu)} kT
 \end{aligned}$$

Antal hål i valensbandet:

$$\begin{aligned}
 N_h &= \int_{-\infty}^{\epsilon_v} a_v V \left[1 - \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \right] d\epsilon = \int_{-\infty}^{\epsilon_v} a_v V \frac{1}{e^{\beta(\mu-\epsilon)} + 1} d\epsilon \approx \\
 &\approx a_v V \int_{-\infty}^{\epsilon_v} e^{-\beta(\mu-\epsilon)} d\epsilon = \{x = \epsilon - \epsilon_v\} = a_v V \int_{-\infty}^0 e^{-\beta(\mu-\epsilon_v)} e^{\beta x} dx = \\
 &= a_v V e^{-\beta(\mu-\epsilon_v)} kT
 \end{aligned}$$

Laddningskonservering ger

$$\begin{aligned}
 N_e = N_h &\Leftrightarrow a_c V e^{-\beta(\epsilon_c-\mu)} kT = a_v V e^{-\beta(\mu-\epsilon_v)} kT \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow e^{2\beta\mu} e^{-\beta(\epsilon_v+\epsilon_c)} = \frac{a_v}{a_c} \Leftrightarrow 2\beta\mu - \beta(\epsilon_v + \epsilon_c) = \ln \frac{a_v}{a_c} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \mu = \frac{\epsilon_v + \epsilon_c}{2} + \frac{kT}{2} \ln \frac{a_v}{a_c}.
 \end{aligned}$$

Tätheten av ledningselektroner blir därför

$$\begin{aligned}
 n_e &= \frac{N_e}{V} = a_c e^{-\beta(\epsilon_c-\mu)} kT = a_c kT \exp \left\{ -\beta(\epsilon_c - \epsilon_v)/2 + \frac{1}{2} \ln \frac{a_v}{a_c} \right\} = \\
 &= \sqrt{a_c a_v} kT \exp \left\{ -\frac{\Delta\epsilon_g}{2kT} \right\}.
 \end{aligned}$$