Chalmers
Institutionen för Teknisk Fysik
Göran Wahnström

Tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik för F3

Tid och plats: Fredag 25 okt 2013, kl 08.30-13.30 i "M"-salar.
Hjälpmedel: Physics Handbook, BETA, ett A4-blad (2 sidor) med egna anteckningar, Chalmersgodkänd räknare.
Jourhavande lärare: Göran Wahnström, tel. 772-3634, 076-1010523.
Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Till detta adderas eventuella duggapoäng. För godkänt krävs 20 poäng (4:a minst 30 poäng, 5:a minst 40 poäng).
Lösningar: Anslås på kurshemsidan.
Rättningsgranskning: Fredag 8 nov 2013, kl 11.30-13.00 i S3031, 3:e våningen i byggnad Soliden.

1. Betrakta en behållare A som innehåller en vätska som har värmekapacitiviteten c_A (J/kg K). Behållaren innehåller m_A (kg) av vätskan vid temperaturen T_A (°C). Vi önskar värma upp denna vätska till en högre temperatur. Till vårt förfogande har vi m_B (kg) vatten vid temperaturen T_B (°C) där $T_B > T_A$. Beteckna vattnets värmekapacitivitet med c_B (J/kg K). Genom att bringa vattnet i termisk kontakt med vätskan i behållare A kan värme överföras. När jämvikt inträtt har de samma temperatur. Vi tänker oss en idealiserad situation där ingen värme förloras till omgivningen, behållarnas värmekapacitet försummas och all värmeöverföring sker via termisk kontakt, dvs vi använder oss inte av några värmepumpar eller dylikt.

   i) Härled ett uttryck för sluttemperaturen uttryckt i T_A, T_B, c_A, c_B, m_A och m_B.

   ii) Vi vill nu försöka öka sluttemperaturen för vätskan i behållare A. Vi låter därför först bara hälften av vattnet komma i kontakt med behållare A och värme överförs. När jämvikt har inställt sig avlägsnas det "förbrukade" vattnet och vi låter resten av vattnet (med begynnelsetemperatur T_B) komma i termisk kontakt med behållare A. Termisk jämvikt inställer sig. Härled ett uttryck för sluttemperaturen för vätskan i A i detta fall.

   iii) Låt nu istället vätskan i behållare A successivt komma i termisk kontakt med infinitesimala mängder vatten som när jämvikt har inställt sig avlägsnas. Härled ett uttryck för sluttemperaturen för vätskan i A i detta fall.

   iv) Beräkna slutligen numeriskt sluttemperaturen i de tre olika fallen. Antag att $T_A = 20\,°\mathrm{C}$, $T_B = 80\,°\mathrm{C}$, $m_A = m_B$ och $c_A = 2c_B$.

2. En kompressor tar in luft vid 0.1 MPa och 20 °C och avlevererar luften vid 0.6 MPa. Massflödet är 10 g/s. Antag att luftens kompression sker adiabatiskt och kvasistatiskt samt att dess hastighet vid intaget

och vid utloppet är försumbart liten. Luften får behandlas som en idealgas med konstant värmekapacitet. i) Bestäm den minsta effekt som erfordras av kompressorn. ii) Om man tar hänsyn till luftens ändliga hastighet vid utloppet, som är 20 m/s, hur förändras då den minsta effekt som erfordras? Du får fortfarande försumma luftens hastighet vid intaget.

3. Studera ett system av N atomer i en volym V vid temperaturen T. Varje atom har två inre frihetsgrader. För systemet gäller att Helmholtz fria energi ges av uttrycket

$$\begin{aligned} F(N,V,T) &= -NkT\left\{\ln\frac{V-Nb}{N} - \frac{3}{2}\ln\frac{h^2}{2\pi mkT} + 1\right\} \\ &\quad -NkT\ln\left(1+e^{\Delta/kT}\right) - \frac{aN^2}{V} \end{aligned}$$

   där a och b är två konstanter och Δ är energiskillnaden mellan de två inre frihetsgraderna. Beräkna systemets energi U och dess tryck P. Uttrycken innehållande a och b i $F(N,V,T)$ tar hänsyn till en viss fysikalisk effekt. Vilken? Vad beskriver a respektive b fysikaliskt?

4. Betrakta ett system av N icke-växelverkande elektroner som rör sig i en dimension i en "låda" med längden L. Energinivåerna för en elektron ges av uttrycket

$$\epsilon_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 n^2 \quad \text{där} \quad n = 1, 2, \ldots$$

   och där m är elektronens massa.

   i) Härled ett uttryck för tillståndstätheten $g(\epsilon)$.

   ii) Bestäm systemets Fermi energi ϵ_F, dvs kemiska potentialen för systemet vid temperaturen $T = 0$.

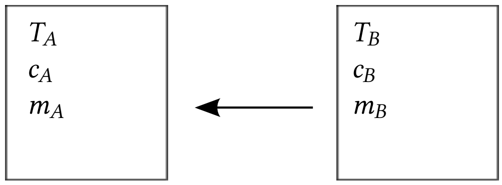
   iii) Beräkna elektronens medelenergi vid $T = 0$ uttryckt i systemets Fermienergi ϵ_F.

5. Betrakta det elektromagnetiska strålningsfältet i ett hålrum med volymen 1 dm^3. Antag att hålrummets väggar hålls vid temperaturen 1500 K. Vad är hålrumsstrålningens totala energi i enheten Joule? Jämför denna energi med motsvarande termiska energi om man antar att hålrummet är fyllt med luft vid atmosfärstryck. Bestäm därefter hur stor del av strålningsenergin som ligger inom det synliga spektrat, dvs med våglängder mellan 400 nm och 700 nm. Teckna först ett uttryck för andelen. Gör därefter en lämplig numerisk approximation och bestäm andelen numeriskt. Ange en feluppskattning av ditt numeriska svar. Notera att Physics Handbook listar värdet av ett antal bestämda integraler som kan vara till användning.

Chalmers
Institutionen för Teknisk Fysik
Anders Lindman, Edit Helgee, 2013-10-25

Lösningar till tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik

Uppgift 1



Beteckna $C_A = m_A c_A$ och $C_B = m_B c_B$.

i) Energikonservering ger att

$$C_A(T_\mathrm{f} - T_A) = C_B(T_B - T_\mathrm{f})$$

Således ges sluttemperaturen av

$$T_\mathrm{f} = \frac{C_A T_A + C_B T_B}{C_A + C_B}$$

ii) Då behållare A är i kontakt med första hälften av vattnet i behållare B så gäller att

$$C_A(T_\mathrm{i} - T_A) = \frac{C_B}{2}(T_B - T_\mathrm{i})$$

vilket ger att jämviktstemperaturen

$$T_\mathrm{i} = \frac{2C_A T_A + C_B T_B}{2C_A + C_B}$$

Om den den första hälften av vattnet avlägsnas och den andra hälften tillförs så gäller att

$$C_A(T_\mathrm{f} - T_\mathrm{i}) = \frac{C_B}{2}(T_B - T_\mathrm{f})$$

vilket ger sluttemperaturen

$$T_\mathrm{f} = \frac{2C_A T_\mathrm{i} + C_B T_B}{2C_A + C_B} = \frac{4C_A^2 T_A + (4C_A C_B + C_B^2)T_B}{(2C_A + C_B)^2}$$

iii) Om en infinitesimal andel dm av vattnet i behållare B är kontakt med med behållare A så gäller att

$$C_A \mathrm{d}T = c_B \mathrm{d}m(T_B - T)$$

vilket kan skrivas som

$$\frac{\mathrm{d}T}{T_B - T} = \frac{c_B}{C_A} dm$$

T_f kan nu erhållas genom integrering enligt

$$\int_{T_A}^{T_\text{f}} \frac{\mathrm{d}T}{T_B - T} = \frac{c_B}{C_A} \int_0^{m_B} dm$$

vilket ger

$$-\ln \frac{T_B - T_\text{f}}{T_B - T_A} = \frac{c_B}{C_A} m_B = \frac{C_B}{C_A}$$

Löses T_f ut så erhålls

$$T_\text{f} = T_B - (T_B - T_A) e^{-C_B/C_A}$$

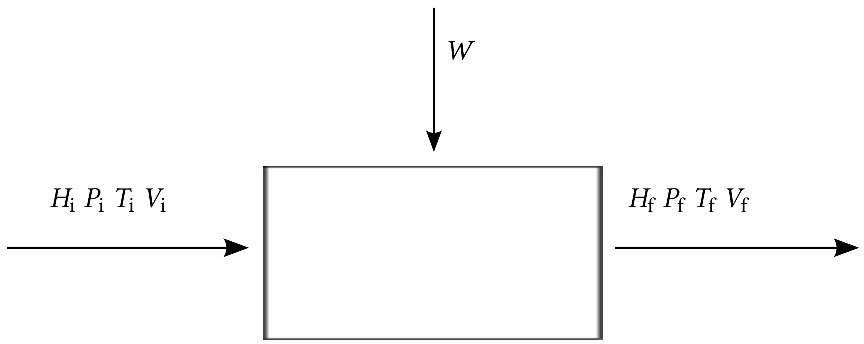
iv) Med $T_A = 20\,^\circ\text{C}$, $T_B = 80\,^\circ\text{C}$, $m_A = m_B$ och $c_A = 2c_B$ så är sluttemperaturen i de tre fallen följande

i) $T_\text{f} = 40\,^\circ\text{C}$

ii) $T_\text{f} = 41.6\,^\circ\text{C}$

iii) $T_\text{f} = 43.6\,^\circ\text{C}$

Uppgift 2



i) Då luftens hastighet kan försummas vid in- och utloppet så ger energikonservering att

$$H_i + W = H_f$$

eller

$$W = H_f - H_i = \Delta H$$

Vidare så gäller att

$$\frac{\partial H}{\partial T} = C_P$$

vilket ger

$$\Delta H = \int_{T_i}^{T_f} C_P \mathrm{d}T = C_P \int_{T_i}^{T_f} \mathrm{d}T = C_P(T_f - T_i)$$

då C_P är konstant. För att bestämma ΔH behövs värden för T_f och C_P. Kompressionen sker adiabatiskt vilket betyder att förhållandet mellan två tillstånd kan skrivas som

$$V_1 T_1^{f/2} = V_2 T_2^{f/2}$$

eller

$$T_1 P_1^{-2/(f+2)} = T_2 P_2^{-2/(f+2)}$$

där f är antalet frihetsgrader. För luft vid rumstemperatur är $f = 5$ vilket ger

$$T_f = T_i \left(\frac{P_i}{P_f}\right)^{-2/7} = 489\,\mathrm{K} = 216\,^\circ\mathrm{C}$$

Vidare så gäller att $c_p = 1.01\,\mathrm{J/g\,K}$ (Physics Handbook). Massflödet är $\dot{m} = 10\,\mathrm{g/s}$ vilket ger $\dot{m}c_p = 10.1\,\mathrm{J/s\,K}$. Med värden för c_p och T_f kan nu effekten $\dot{W}$ bestämmas till

$$\dot{W} = 10.1 \cdot (216 - 20)\,\mathrm{J/s} = 1.98\,\mathrm{kW}$$

ii) Om luftens hastighet vid utloppet inte kan försummas så ger energikonservering att

$$H_\mathrm{i} + W = H_\mathrm{f} + K$$

eller

$$W = H_\mathrm{f} - H_\mathrm{i} + K = \Delta H + K$$

där K är luften kinetiska energi. Med $v = 20\,\mathrm{m/s}$ är den kinetiska energin per tidsenhet

$$\dot{K} = \frac{\dot{m}v^2}{2} = \frac{0.01 \cdot 20^2}{2}\,\mathrm{J/s} = 2\,\mathrm{W}$$

vilket ger en minsta effekt

$$\dot{W} = 1.982\,\mathrm{kW}$$

Uppgift 3

Helmholtz fria energi ges av

$$F = U - TS$$

och således

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}U - T\mathrm{d}S - S\mathrm{d}T$$

Om $\mathrm{d}U$ ersätts med den termodynamiska identiteten

$$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}N$$

så erhålls

$$\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - P\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}N$$

Den här relationen kan nu användas för att bestämma P och U. Genom att hålla T och N konstant ges trycket av

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N}$$

Med det givna uttrycket för $F(N, V, T)$ blir trycket

$$P = \frac{Nk_\mathrm{B}T}{V - Nb} - \frac{aN^2}{V^2}$$

Genom att hålla V och N konstant så ges entropin av

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N}$$

Med den här relationen kan U bestämmas enligt

$$U = F + TS = F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} = -T^2\left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{F}{T}\right)\right)_{V,N}$$

Med det givna uttrycket för $F(N, V, T)$ blir den inre energin

$$\begin{aligned} U &= T^2\left(Nk_\mathrm{B}\frac{3}{2}\frac{1}{T} + Nk_\mathrm{B}\frac{(-\Delta/k_\mathrm{B}T^2)e^{\Delta/k_\mathrm{B}T}}{1 + e^{\Delta/k_\mathrm{B}T}} - \frac{aN^2}{VT^2}\right) \\ &= \frac{3}{2}Nk_\mathrm{B}T - N\frac{\Delta}{1 + e^{-\Delta/k_\mathrm{B}T}} - \frac{aN^2}{V} \end{aligned}$$

Termerna som innehåller a och b tar hänsyn växelverkan mellan atomer, där a motsvarar en attraktiv kraft medan b motsvarar en minsta volym som ger upphov till repulsiv växelverkan.

Uppgift 4

i) För att få fram tillståndstätheten sätter vi upp summan av alla enpartikeltillstånd s i systemet. Vi får

$$\sum_s = 2\sum_n$$

Där de två olika spintillstånden ger en faktor två. Vi omvandlar summan till en integral:

$$2\int_o^\infty dn = \int_0^\infty g(\varepsilon)d\varepsilon$$

Den andra integralen innehåller tillståndstätheten, som alltså måste ges av

$$g(\varepsilon) = 2\frac{dn}{d\varepsilon}$$

Vi har givet att

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 n^2$$

vilket ger

$$g(\varepsilon) = 2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\frac{L}{\pi}\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} = L\frac{\sqrt{8m}}{h}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

ii) Antalet partiklar kan uttryckas som

$$N = \sum_s \bar{n}_{\mathrm{FD}}(\varepsilon_s) = \int_0^\infty g(\varepsilon)n_{\mathrm{FD}}(\varepsilon)d\varepsilon$$

Där n_{FD} är Fermi-Diracfördelningen. Vid $T = 0$ är denna 0 ovanför Fermienergin och 1 under Fermienergin och vi får

$$\int_0^{\varepsilon_F} g(\varepsilon)d\varepsilon = L\frac{\sqrt{8m}}{h}2\varepsilon_F^{1/2}$$

Vilket ger Fermienergin

$$\varepsilon_F = \frac{h^2}{32m}\left(\frac{N}{L}\right)^2$$

iii) Energin kan beräknas:

$$U = \sum_s \varepsilon_s\bar{n}_{\mathrm{FD}}(\varepsilon_s) = \int_0^\infty g(\varepsilon)\ \varepsilon n_{\mathrm{FD}}(\varepsilon)d\varepsilon$$

Med $T = 0$ får vi

$$U = \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon g(\varepsilon)d\varepsilon = L\frac{\sqrt{8m}}{h}\frac{2}{3}\varepsilon_F^{3/2}$$

Vi får då

$$\frac{U}{N} = \frac{1}{3}\varepsilon_F$$

Uppgift 5

Den spektrala energitätheten är

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

Om man sätter

$$x = \frac{hc}{\lambda kT}, \quad dx = \frac{hc}{kT} \frac{-d\lambda}{\lambda^2}$$

får man den totala energitätheten

$$U = \int_0^\infty u(\lambda) d\lambda = \frac{8\pi (kT)^4}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{8\pi (kT)^4}{(hc)^3} \frac{\pi^4}{15}$$

Vilket ger totalenergin

$$U_{tot} = \frac{8\pi^5}{15} \frac{(kT)^4}{(hc)^3} V$$

Med $T = 1500$ K och $V = 1$ dm^3 får man $U_{tot} = 3.85 \times 10^{-6}$ J. Den motsvarande termiska energin för en diatomär idealgas (luft) vid atmosfärstryck är

$$U_{therm} = \frac{f}{2} NkT = \frac{5}{2} PV = 506.5 \text{ J}$$

Andelen strålningsenergi i ett intervall $[\lambda_a, \lambda_b]$ kan skrivas

$$q = \frac{\int_{\lambda_b}^{\lambda_a} u(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty u(\lambda) d\lambda} = \frac{15}{\pi^4} \int_{x_a}^{x_b} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

För det synliga spektrat har vi $\lambda_a = 700$ nm, $\lambda_b = 400$ nm vilket vid 1500 K ger $x_a = 13.7$, $x_b = 24.0$. Eftersom både $x_a, x_b >> 1$ gör vi approximationen

$$q \approx \frac{15}{\pi^4} \int_{x_a}^{x_b} \frac{x^3}{e^x} dx = \frac{15}{\pi^4} \left[e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) \right]_{24.0}^{13.7} = 5.4 \times 10^{-4}$$

Felet kan uppskattas t.ex. genom

$$\Delta q < \max_x \left[\frac{x^3}{e^x - 1} - \frac{x^3}{e^x} \right] \cdot (x_b - x_a) \frac{15}{\pi^4} = \frac{x_a^3}{e^{x_a}(e^{x_a} - 1)} \cdot (x_b - x_a) \frac{15}{\pi^4} \approx 5 \times 10^{-9}$$