

Tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik för F3

Tid och plats: Onsdag 15 jan 2014, kl 08.30-13.30 i "Maskin"-salar.

Hjälpmedel: Physics Handbook, BETA, ett A4-blad (2 sidor) med egna anteckningar, Chalmersgodkänd räknare.

Jourhavande lärare: Göran Wahnström, tel. 772-3634, 076-1010523.

Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Till detta adderas eventuella duggapoäng. För godkänt krävs 20 poäng (4:a minst 30 poäng, 5:a minst 40 poäng).

Lösningar: Anslås på kurshemsidan.

Rättningsgranskning: Tisdag 28 jan 2014, kl 11.30-13.00 i S3020, 3:e våningen i byggnad Soliden.

1. Man önskar kyla ned en viss mängd heliumgas. Gasen är placerad i en cylinder vars volym kan regleras med en friktionsfri kolv. Från början har gasen trycket 100 kPa och temperaturen 20 °C. Den komprimeras därefter till trycket 900 kPa vid konstant temperatur och sedan låter man den expandera adiabatiskt tillbaka till begynnelsestrycket 100 kPa. Båda processerna får antas ske kvasistatiskt och heliumgasen får behandlas som en idealgas med konstant värmekapacitet. Beräkna sluttemperaturen. Skulle sluttemperaturen blivit högre eller lägre om gasen hade varit syre i stället för helium?
2. Ett hus värms upp med hjälp av en värmepump. Värmepumpen pumpar värme från omgivningen som har temperaturen T_0 . Pumpen förbrukar den konstanta effekten P . Det får antas att värmepumpen arbetar helt idealt. Värmeläckaget från huset är $\alpha(T - T_0)$ per tidsenhet, där T är inomhustemperaturen och α en konstant. Beräkna inomhustemperaturen T vid jämvikt som funktion av T_0 , P och α . Bestäm också den elektriska effekt som krävs om man vill hålla samma inomhustemperatur med direktverkande elvärme och visa att denna effekt är större än P .
3. Figuren nedan visar principen för ett vanligt kompressorkylskåp. Kylmediet komprimeras adiabatiskt i kompressorn som får antas arbeta idealt. Därefter avges värme i kondensorn vid konstant tryck. Trycket sänks därefter med hjälp av en strypventil. Vid denna process kan värmeförluster till omgivningen försummas. Slutligen upptas värme från kylrummet genom att kylmediet förångas vid konstant tryck. Antag att kompressorkylskåpet arbetar mellan trycken 1.0 och 10.0 bar. Data för det aktuella kylmediet HFC-134a återfinns i bifogade tabeller. Bestäm kylskåpets verkningskoefficient. Hur stor andel av kylmediet förångas i strypprocessen, mellan punkt 3 och 4 i figuren?

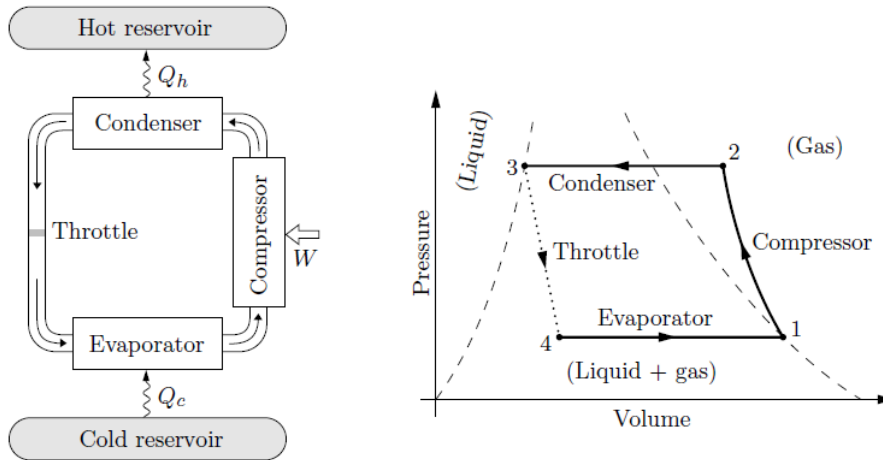


Figure 4.9. A schematic drawing and PV diagram (not to scale) of the standard refrigeration cycle. The dashed lines indicate where the refrigerant is liquid, gas, and a combination of the two. Copyright ©2000, Addison-Wesley.

4. Ett system har N icke degenererade energinivåer

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

Bestäm tillståndssumman för systemet. Beräkna därefter systemets entropi som funktion av temperaturen T . Bestäm entropins uppförande för låga respektive höga temperaturer. Vad blir gränsvärdena då T går mot noll respektive oändligheten?

5. För ett visst elektriskt ledande material gäller att energinivåerna för ledningselektronerna ges av uttrycket

$$\epsilon_{n_1, n_2, n_3} = -\epsilon_0 \cos\left(\sqrt{(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)/N_e^{1/3}}\right), \quad n_1, n_2, n_3 \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

där N_e är antalet ledningselektroner i den givna volymen och $N_e \gg 1$. Indexen begränsas uppåt av $\sqrt{(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)} < \pi N_e^{1/3}$. Bestäm Fermi energin ϵ_F för systemet samt tillståndstätheten $g(\epsilon)$.

P (bar)	T (°C)	H_{liquid} (kJ)	H_{gas} (kJ)	S_{liquid} (kJ/K)	S_{gas} (kJ/K)
1.0	-26.4	16	231	0.068	0.940
1.4	-18.8	26	236	0.106	0.932
2.0	-10.1	37	241	0.148	0.925
4.0	8.9	62	252	0.240	0.915
6.0	21.6	79	259	0.300	0.910
8.0	31.3	93	264	0.346	0.907
10.0	39.4	105	268	0.384	0.904
12.0	46.3	116	271	0.416	0.902

Table 4.3. Properties of the refrigerant HFC-134a under saturated conditions (at its boiling point for each pressure). All values are for 1 kg of fluid, and are measured relative to an arbitrarily chosen reference state, the saturated liquid at -40°C . Excerpted from Moran and Shapiro (1995). Copyright ©2000, Addison-Wesley.

P (bar)		Temperature (°C)		
		40	50	60
8.0	H (kJ)	274	284	295
	S (kJ/K)	0.937	0.971	1.003
10.0	H (kJ)	269	280	291
	S (kJ/K)	0.907	0.943	0.977
12.0	H (kJ)		276	287
	S (kJ/K)		0.916	0.953

Table 4.4. Properties of superheated (gaseous) refrigerant HFC-134a. All values are for 1 kg of fluid, and are measured relative to the same reference state as in Table 4.3. Excerpted from Moran and Shapiro (1995). Copyright ©2000, Addison-Wesley.

Lösningar till tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik

Uppgift 1

För en kvasistatisk adiabatisk process gäller att

$$PV^\gamma = \text{konstant}$$

där $\gamma = (f + 2)/f$ är den adiabatiska exponenten och f är antalet frihetsgrader. Med hjälp av ideala gaslagen kan detta uttryck skriva som

$$P^{(1-\gamma)/\gamma} T = \text{konstant}$$

Om begynnelse- och sluttillståndet betecknas med index i respektive f så gäller att

$$P_i^{(1-\gamma)/\gamma} T_i = P_f^{(1-\gamma)/\gamma} T_f$$

eller

$$T_f = T_i \left(\frac{P_i}{P_f} \right)^{(1-\gamma)/\gamma}$$

För Helium är $f = 3$ vilket ger $\gamma = 5/3$. Med $T_i = 20^\circ\text{C} = 293\text{ K}$, $P_i = 900\text{ kPa}$, $P_f = 100\text{ kPa}$ kan sluttemperaturen bestämmas till $T_f = 121.7\text{ K} = -151.3^\circ\text{C}$.

Om gasen istället består av syre ökar antalet frihetsgrader till $f = 5$ vilket ger $\gamma = 7/5$. Med detta värde på γ blir $T_f = 156.4\text{ K} = -116.6^\circ\text{C}$ vilket är en högre temperatur.

Uppgift 2

Värmet som pumpas in i huset per tidsenhet ges av

$$\dot{Q}_{in} = \dot{Q}_0 + P$$

där \dot{Q}_0 är värmet från omgivningen. Då värmepumpen är ideal är entropin bevarad, dvs

$$\frac{\dot{Q}_0}{T_0} = \frac{\dot{Q}_{in}}{T} \Rightarrow \dot{Q}_0 = \frac{T_0}{T} \dot{Q}_{in}$$

vilket ger

$$\dot{Q}_{in} = \frac{T}{T - T_0} P$$

Värmet som läcker ut ur huset ges av $\dot{Q}_{ut} = \alpha(T - T_0)$. Vid jämvikt är $\dot{Q}_{in} = \dot{Q}_{ut}$ vilket ger

$$\frac{T}{T - T_0} P = \alpha(T - T_0)$$

Detta uttryck kan skrivas som en andragsgradsekvation

$$T^2 - \left(2T_0 + \frac{P}{\alpha}\right) T + T_0^2 = 0$$

vilken har lösningarna

$$T = T_0 + \frac{P}{2\alpha} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\alpha T_0}{P}}\right)$$

Då T inte kan vara mindre än T_0 är enbart den positiva lösningen rimlig och således är inomhustemperaturen vid jämvikt

$$T = T_0 + \frac{P}{2\alpha} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\alpha T_0}{P}}\right)$$

Om huset istället värms upp med el så gäller att $\dot{Q}_{in} = P_{el}$ vilket vid jämvikt ger

$$P_{el} = \alpha(T - T_0)$$

Om elen bidrar med lika mycket värme som pumpen är

$$P_{el} = \frac{T}{T - T_0} P$$

Då $T/(T - T_0) > 1$ så följer att $P_{el} > P$.

Uppgift 3

Verkningskoefficienten för kompressorkylskåpet ges av

$$\text{COP} = \frac{Q_c}{W} = \frac{H_1 - H_4}{H_2 - H_1} = \frac{H_1 - H_3}{H_2 - H_1}$$

där det sista steget använder sig av $H_3 = H_4$ då entalpin bevaras vid passage av strypventilen. För att bestämma COP behövs alltså H_1 , H_2 och H_3 .

I steg 1 är kylmedlet i mättad gasform samt $P = 1$ bar och då är $H_1 = 231$ kJ enligt tabell 4.3. I steg 2 är $P = 10$ bar och kylmedlet är överhettad gasform. För att bestämma H_2 från tabell 4.4 behövs kylmedlets temperatur. Då kompressorn arbetar adiabatiskt bevaras entropin i kompressorn, dvs. $S_2 = S_1$, och enligt tabell 4.3 är $S_1 = 940$ J/K. Då $P = 10$ bar är entropin 907 J/K och 943 J/K vid 40°C respektive 50°C enligt tabell 4.4 och därav bör gasens temperatur vara däremellan. Om $S(T)$ antas vara linjär i detta intervall ökar entropin med 3.6 J/K per grad. Gasens entropi är 3 J/K lägre än entropin vid temperaturen 50°C så dess temperatur är

$$T = \left(50 - \frac{3}{3.6} \right) ^\circ\text{C} = 49.17^\circ\text{C}$$

Då det inte finns något tabellerat värde för entalpin vid den här temperaturen måste även linjär interpolation användas här. Entalpin ökar med 1.1 kJ per grad i samma intervall vilket ger

$$H_2 = (280 - 0.83 \cdot 1.1) \text{ kJ} \approx 279 \text{ kJ}$$

I steg 3 är kylmedlet i mättad vätskeform samt $P = 10$ bar och då är $H_3 = 105$ kJ enligt tabell 4.3. Dessa tre värden för H_1 , H_2 och H_3 ger $\text{COP} = 2.625$.

Andelen vätska som förångas i strypventilen kan beräknas genom att utnyttja att entalpin bevaras vid passage av strypventilen. Om x är andelen som förångas så gäller att

$$xH_4^g + (1 - x)H_4^v = H_3$$

där H_4^g och H_4^v är entalpin för gas respektive vätska i steg 4. x kan lösas ut vilket ger

$$x = \frac{H_3 - H_4^v}{H_4^g - H_4^v}$$

$H_4^g = H_1$ och enligt tabell 4.3 är $H_4^v = 16$ kJ vilket ger $x = 0.41$. Alltså förångas 41% av kylvätskan.

Uppgift 4

Systemets tillståndssumma ges av

$$Z = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{E_n}{k_B T}} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{\hbar\omega(n+1/2)}{k_B T}} = e^{-\frac{\hbar\omega}{2k_B T}} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \right)^n = e^{-\frac{\hbar\omega}{2k_B T}} \frac{1 - e^{-\frac{N\hbar\omega}{k_B T}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}$$

Entropin kan nu bestämmas utifrån tillståndssumman enligt

$$S = \frac{\partial}{\partial T} (k_B T \ln Z)$$

vilket med ovanstående uttryck för Z ger

$$\begin{aligned} S &= \frac{\partial}{\partial T} \left(-\frac{\hbar\omega}{2} + k_B T \ln \left(1 - e^{-\frac{N\hbar\omega}{k_B T}} \right) - k_B T \ln \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \right) \right) \\ &= k_B \ln \left(1 - e^{-\frac{N\hbar\omega}{k_B T}} \right) - \frac{N\hbar\omega}{T} \cdot \frac{e^{-\frac{N\hbar\omega}{k_B T}}}{1 - e^{-\frac{N\hbar\omega}{k_B T}}} - k_B \ln \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \right) + \frac{\hbar\omega}{T} \cdot \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}} \\ &= k_B \left[\ln \left(1 - e^{-Nx} \right) - \ln \left(1 - e^{-x} \right) + \frac{x}{e^x - 1} - \frac{Nx}{e^{Nx} - 1} \right] \end{aligned}$$

där $x = \hbar\omega/k_B T$.

Vi betraktar nu S vid låga respektive höga temperaturer. Vid låga temperaturer är $\hbar\omega \gg k_B T$ vilket ger $x \gg 1$. Således är $e^{\pm x}$ stort respektive litet och S kan approximeras till

$$S \approx k_B \left[-e^{-Nx} + e^{-x} + xe^{-x} - Nxe^{-Nx} \right] \approx k_B xe^{-x}$$

Då T går mot noll går x mot oändligheten vilket ger gränsvärdet $S \rightarrow 0$.

Vid höga temperaturer är $\hbar\omega \ll k_B T$ vilket ger $x \ll 1$. Med Taylorutveckling kan S approximeras till

$$\begin{aligned} S &\approx k_B \left[\ln \left(Nx - \frac{N^2 x^2}{2} \right) - \ln \left(x - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{x}{x + \frac{x^2}{2}} - \frac{Nx}{Nx + \frac{N^2 x^2}{2}} \right] \\ &= k_B \left[\ln N + \ln \left(1 - \frac{Nx}{2} \right) - \ln \left(1 - \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{1 + \frac{x}{2}} - \frac{1}{1 + \frac{Nx}{2}} \right] \\ &\approx k_B \left[\ln N - \frac{Nx}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{Nx}{2} \right] = k_B \ln N \end{aligned}$$

vilket är oberoende av x och således av T . Genom att inkludera högre ordningens termer kan följande temperaturberoende härledas

$$S = k_B \left[\ln N - \frac{N^2 - 1}{24} x^2 \right]$$

Då T går mot oändligheten går x mot noll vilket ger gränsvärdet $S \rightarrow k_B \ln N$.

Uppgift 5

Antalet tillstånd ges av

$$2 \sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3}$$

där faktorn 2 tar hänsyn till spinn. Summan kan skrivas om till integralen

$$2 \int dn_1 \int dn_2 \int dn_3 = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{n^{\max}} n^2 dn = \pi \int_0^{n^{\max}} n^2 dn$$

För tillståndstätheten $g(\epsilon)$ gäller att

$$\pi \int_0^{n^{\max}} n^2 dn = \int_{-\epsilon_0}^{\epsilon_0} g(\epsilon) d\epsilon$$

vilket ger

$$g(\epsilon) = \pi n^2 \frac{dn}{d\epsilon}$$

För energinivåerna så gäller uttrycket

$$\epsilon(n) = -\epsilon_0 \cos\left(\frac{n}{N_e^{1/3}}\right) \Rightarrow n = N_e^{1/3} \arccos\left(-\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)$$

där $n = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$. Med detta ges tillståndstätheten av

$$\begin{aligned} g(\epsilon) &= \pi \left[N_e^{1/3} \arccos\left(-\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right) \right]^2 \frac{d}{dn} \left(N_e^{1/3} \arccos\left(-\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right) \right) \\ &= \frac{\pi N_e}{\epsilon_0} \cdot \frac{[\arccos(-\epsilon/\epsilon_0)]^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^2}} \end{aligned}$$

Fermienergin ϵ_F kan nu bestämmas med $g(\epsilon)$ enligt

$$\begin{aligned} N_e &= \int_{-\epsilon_0}^{\epsilon_F} g(\epsilon) d\epsilon = \int_{-\epsilon_0}^{\epsilon_F} \frac{\pi N_e}{\epsilon_0} \cdot \frac{[\arccos(-\epsilon/\epsilon_0)]^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^2}} d\epsilon \\ &= \pi N_e \int_{-\epsilon_0}^{\epsilon_F} \frac{d}{d\epsilon} \left(\frac{1}{3} \left[\arccos\left(-\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right) \right]^3 \right) d\epsilon = \frac{\pi N_e}{3} \cdot \left[\arccos\left(-\frac{\epsilon_F}{\epsilon_0}\right) \right]^3 \end{aligned}$$

vilket ger

$$\epsilon_F = -\epsilon_0 \cos\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} = -0.553\epsilon_0$$

Alternativt kan ϵ_F bestämmas på ett enklare sätt. Då alla tillstånd upp till Fermivån ockuperas ryms dessa i en volym som motsvaras av en 8-dels sfär med radien n_F , dvs

$$2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi n_F^3}{3} = N_e \Rightarrow n_F = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} N_e^{1/3}$$

Med uttrycket för n_F kan nu ϵ_F bestämmas enligt

$$\epsilon_F = \epsilon(n_F) = -\epsilon_0 \cos\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} = -0.553\epsilon_0$$