Chalmers
Institutionen för Teknisk Fysik
Göran Wahnström

Tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik för F3

Tid och plats: Torsdag 30 okt 2014, kl 08.30-13.30 i "V"-salar.
Hjälpmedel: Physics Handbook, BETA, ett A4-blad (2 sidor) med egna anteckningar, Chalmersgodkänd räknare.
Jourhavande lärare: Göran Wahnström, tel. 772-3634, 076-1010523.
Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Till detta adderas eventuella duggapoäng. För godkänt krävs 20 poäng (4:a minst 30 poäng, 5:a minst 40 poäng).
Lösningar: Anslås på kurshemsidan.
Rättningsgranskning: Torsdag 13 nov 2014, kl 12.30-13.30 i rum O7112B, översta våningen i Origohuset, norra flygeln.

1. En skadad miniubåt har sjunkit och ligger på botten 80 m under havsytan i Stockholms yttre skärgård. Plötsligt brister en ventil och vatten strömmar in. Därvid bildas en luftficka där den instängda luften komprimeras tills den fått samma tryck som det omgivande havsvattnet. Luften har från början volymen 6 m^3, trycket 100 kPa och temperaturen 25 °C. Luften får behandlas som en idealgas med konstant värmekapacitet.

   (a) Vad blir luftens volym och temperatur omedelbart efter kompressionen, om den antas ske så snabbt att inget nämnvärt värmeutbyte med omgivningen hinner ske?

   (b) Så småningom avkyls den instängda luften till samma temperatur som havsvattnet, nämligen 4 °C. Hur mycket värme avger luften under nedkylningen?

2. Två gasbehållare, som vardera har volymen 10 m^3, är förenade med varandra med en ventil. Från början är ventilen stängd och behållarna innehåller olika mängder helium av rumstemperatur (20 °C). I den ena behållaren är trycket 100 kPa och i den andra 500 kPa. När kranen öppnas strömmar gas över till den med lägre tryck så att trycket utjämnas och blir lika i de två behållarna. Behållarnas väggar är värmeisolerade och gasen får behandlas som en idealgas. Bestäm entropiändringen för denna process!

3. I en så kallad jonfälla kan man med elektriska och/eller magnetiska fält fånga och behålla enskilda joner i fritt tillstånd inom en begränsad volym. Jonfällor kan utnyttjas för olika slag av precisionsspektroskopi och för studier av grundläggande kvantmekaniska fenomen. Till en första approximation kan man anta att den instängda jonen rör sig i en tredimensionell harmonisk oscillator potential. Energinivåerna för denna ges av uttrycket

$$E_{n_1,n_2,n_3} = (n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2})\, \hbar\omega \ , \quad n_1, n_2, n_3 \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$

där ω är vinkelfrekvensen för små svängningar kring jämviktsläget. Man kan minska jonens rörelseenergi genom laserkylning. Man utnyttjar då resonans mellan laserstrålen och optiska övergångar i jonen. Vid ett sådant experiment studerade man en Hg^+ jon. Den aktuella jonfällan kan beskrivas med en tredimensionell potential med vinkelfrekvensen ω=18,6·10^6 radianer/s. Experimentalisterna hävdade att de lyckades kyla ned jonen så mycket att den var i grundtillståndet 95 % av tiden. Vilken temperatur motsvarar det?

4. På ytan av ett visst material kan argonatomer adsorberas. Antag att materialet har ett begränsat antal adsorptionsplatser N_{ad}. Varje sådan plats kan adsorbera högst en argonatom. Beteckna bindningsenergin med ϵ ($\epsilon < 0$, en bunden argonatom sänker systemets energi) och argonatomens massa med m. Adsorptionsplatserna är oberoende av varandra, det finns ingen växelverkan mellan adsorberade argonatomer.

   Materialet placeras i ett provrör fyllt med ren argongas vid temperaturen T. Provröret tillsluts. Initialt är alla adsorptionsplatser tomma och gasens tryck är P_1. Då jämvikt har inställt sig har en andel av adsorptionsplatserna fyllts med argonatomer och trycket har sänkts till P_2. Gasens volym är V och temperaturen är hela tiden T (provröret är inte värmeisolerat).

   Härled ett uttryck för antalet adsorptionsplatser N_{ad}, uttryckt i problemet definerade storheter samt naturkonstanter!

5. Betrakta värmebalansen mellan solen och jorden. Antag att solen strålar som en svartkropp med temperaturen 5800 K.

   (a) Vad blir jordens temperatur om man helt försummar effekten av jordens atmosfär och antar att jorden strålar som en svartkropp?

   (b) Tag nu hänsyn till att jordens atmosfär direkt reflekterar ungefär 30% av det infallande solljuset. Denna andel av det infallande solljuset når därför inte jordens yta. Orsaken till detta är framförallt moln. Vad blir då jordens (jordytans) temperatur?

   (c) Jordens atmosfär reflekterar inte bara infallande solljus utan den kan också absorbera den utgående värmestrålningen från jorden. Antag att atmosfären absorberar all utgående värmestrålning. Orsaken till detta är framförallt att vattenånga och koldioxid i atmosfären effektivt adsorberar värmestrålning för aktuellt våglängsområde. (Däremot släpper den fortfarande igenom 70% av det infallande solljuset.) Atmosfären värms då upp och strålar ut. Antag att denna strålning kan behandlas som svartkroppsstrålning. Värmeutstrålningen från atmosfären sker både ut mot rymden och ned mot jordytan, i lika andelar. Vad blir nu jordens (jordytans) temperatur?

Chalmers
Institutionen för Teknisk Fysik
Anders Lindman, Edit Helgee, 2014-10-30

Lösningar till tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk mekanik

Uppgift 1

(a) Då kompressionen sker utan att värme utbyts med omgivningen är processen adiabatisk. För en adiabatisk process gäller att

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$$

vilket med hjälp av ideala gaslagen kan skrivas som

$$T_1 P_1^{(1-\gamma)/\gamma} = T_2 P_2^{(1-\gamma)/\gamma}$$

där $\gamma = (f+2)/f$ och f är antalet frihetsgrader. Med dessa två uttryck kan luftens volym (V_2) och temperatur (T_2) efter kompressionen bestämmas enligt

$$V_2 = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/\gamma} V_1$$
$$T_2 = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} T_1$$

Givet i uppgiften är att $V_1 = 6\,\mathrm{m}^3$, $T_1 = 25\,^\circ\mathrm{C} = 298\,\mathrm{K}$ och $P_1 = 100\,\mathrm{kPa}$. Vidare så gäller att $f = 5$ för luft vid rumstemperatur (vibrationsfrihetsgraderna är utfrusna) vilket ger $\gamma = 7/5$. Trycket på botten (P_2) ges av trycket från en vattenpelare och kan beräknas enligt

$$P_2 = P_{\text{yta}} + \rho g h$$

där P_{yta} är trycket vid vattenytan, ρ är vattnets densitet, g är tyngdacceleration och h är djupet. Då $P_{\text{yta}} = P_1$ och $h = 80\,\mathrm{m}$ är $P_2 = 886\,\mathrm{kPa}$. Med detta värde får vi att

$$V_2 = 1.26\,\mathrm{m}^3 \qquad T_2 = 556\,\mathrm{K}$$

(b) Då luften kyls ner under konstant tryck ges värmet som luften avger av

$$Q = C_P \Delta T$$

För en idealgas då $f = 5$ är $C_P = \frac{7}{2}Nk$. Då Nk är konstant kan vi skriva

$$C_P = \frac{7}{2} \cdot \frac{P_1 V_1}{T_1} = 7.05\,\mathrm{kJ/K}$$

Då temperaturen sjunker från T_2 till $T = 4\,^\circ\mathrm{C} = 277\,\mathrm{K}$ är $\Delta T = 279\,\mathrm{K}$. Detta ger

$$Q = 1.97\,\mathrm{MJ}$$

Uppgift 2

När ventilen är stängd så ger ideala gaslagen att

$$P_1 V = N_1 kT$$
$$P_2 V = N_2 kT$$

där $V = 10\,\mathrm{m}^3$, $T = 20\,^\circ\mathrm{C} = 293\,\mathrm{K}$, $P_1 = 100\,\mathrm{kPa}$ och $P_2 = 500\,\mathrm{kPa}$. När ventilen öppnats och trycket jämnat ut sig så gäller att

$$P2V = (N_1 + N_2)kT$$

vilket ger

$$P = \frac{P_1 + P_2}{2} = 300\,\mathrm{kPa}$$

Då inget arbete eller värme tas ut ger 1:a huvudsatsen att $\Delta U = 0$ vilket i sin tur leder till att $\Delta T = 0$ då gasen är ideal.

Entropin för en ideal gas ges av Sackur-Tetrode-ekvationen

$$\begin{aligned} S &= Nk\left(\ln\frac{V}{N} + \frac{3}{2}\ln\frac{2\pi mkT}{h^2} + \frac{5}{2}\right) \\ &= Nk\left(\ln\frac{V}{N} + \text{konst}\right) \end{aligned}$$

då T är konstant. Före ventilen öppnas så ges den totala entropin för systemet av

$$S_{\text{före}} = N_1 k \ln\frac{V}{N_1} + N_2 k \ln\frac{V}{N_2} + (N_1 + N_2)\, k \cdot \text{konst}$$

och efter ventilen öppnas ges den av

$$S_{\text{efter}} = (N_1 + N_2)\, k \ln\frac{2V}{N_1 + N_2} + (N_1 + N_2)\, k \cdot \text{konst}$$

Den konstanta termen är samma både före och efter, och entropiförändringen för processen blir således

$$\begin{aligned} \Delta S &= (N_1 + N_2)\, k \ln\frac{2V}{N_1 + N_2} - N_1 k \ln\frac{V}{N_1} - N_2 k \ln\frac{V}{N_2} \\ &= N_1 k \ln\frac{2N_1}{N_1 + N_2} + N_2 k \ln\frac{2N_2}{N_1 + N_2} \\ &= \frac{P_1 V}{T}\ln\frac{P_1}{P} + \frac{P_2 V}{T}\ln\frac{P_2}{P} \end{aligned}$$

Med de angivna värdena för P_1, P_2, V och T får vi att

$$\Delta S = 5\,\mathrm{kJ/K}$$

Uppgift 3

Vi har att energin ges av

$$E_{n_1,n_2,n_3} = \left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$$

där $\omega = 18.6 \times 10^6$ rad/s. Att jonen befinner sig i grundtillståndet 95 % av tiden innebär att sannolikheten att den befinner sig i grundtillståndet, P_0, är 0.95. För grundtillståndet gäller att $n_1 = n_2 = n_3 = 0$. Tillståndssumman ges av

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n_1,n_2,n_3} e^{-E_{n_1,n_2,n_3}/kT} \\ &= e^{-\frac{3}{2}\hbar\omega/kT} \sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-n_1\hbar\omega/kT} \sum_{n_2=0}^{\infty} e^{-n_2\hbar\omega/kT} \sum_{n_3=0}^{\infty} e^{-n_3\hbar\omega/kT} \\ &= \frac{e^{-\frac{3}{2}\hbar\omega/kT}}{(1 - e^{-\hbar\omega/kT})^3} \end{aligned}$$

där vi i sista ledet använt oss av att varje delsumma motsvaras av en geometrisk serie. Sannolikheten att jonen befinner sig i grundtillståndet är

$$P_0 = \frac{e^{-\frac{3}{2}\hbar\omega/kT}}{Z} = (1 - e^{-\hbar\omega/kT})^3$$

vilket ger temperaturen

$$T = -\frac{\hbar\omega}{k}\frac{1}{\ln(1 - P_0^{1/3})} = 3.5 \times 10^{-5}\,\mathrm{K}$$

Uppgift 4

Argon kan vid rimliga tryck och temperaturer betraktas som en idealgas. Antalet adsorberade argonatomer vid jämvikt ges då av

$$N_{\mathrm{Ar,ad}} = \frac{P_1 V}{kT} - \frac{P_2 V}{kT}$$

Detta är också lika med antalet upptagna adsorptionsplatser. Sannolikheten att en adsorptionsplats är upptagen kan då uttryckas som

$$\mathcal{P}_{\mathrm{ad}} = \frac{\frac{V}{kT}(P_1 - P_2)}{N_{\mathrm{ad}}}$$

Sannolikheten kan också uttryckas med hjälp av en tillståndssumma. Vi har för varje adsorptionsplats två möjliga tillstånd, ett där ingen atom är adsorberad ($E = 0,\ N = 0$) och ett med en adsorberad partikel ($E = \varepsilon,\ N = 1$). Med stor kanonisk fördelning blir tillståndssumman

$$\mathcal{Z} = 1 + e^{-(\varepsilon - \mu)/kT}$$

Så vi får

$$\mathcal{P}_{\mathrm{ad}} = \frac{e^{-(\varepsilon-\mu)/kT}}{1 + e^{-(\varepsilon-\mu)/kT}}$$

Den kemiska potentialen μ för en idealgas kan uttryckas som

$$\mu = -kT \ln\left(\frac{VZ_{\mathrm{int}}}{Nv_{\mathrm{q}}}\right)$$

där Z_{int} är tillståndssumman för de inre frihetsgraderna och $v_{\mathrm{q}} = (h^2/2\pi mkT)^{3/2}$. Eftersom argon är en monoatomär gas sätter vi $Z_{\mathrm{int}} = 1$ och eftersom vi vill veta den kemiska potentialen vid jämvikt använder vi $V/N = kT/P_2$. Vi ser då att

$$e^{-\mu/kT} = \frac{kT}{P_2}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}$$

vilket ger

$$\mathcal{P}_{\mathrm{ad}} = \frac{1}{e^{\varepsilon/kT}\frac{kT}{P_2}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2} + 1}$$

Insatt i ovanstående uttryck för $\mathcal{P}_{\mathrm{ad}}$ får vi följande uttryck för antalet adsorptionsplatser

$$N_{\mathrm{ad}} = \frac{V}{kT}(P_1 - P_2)\left[e^{\varepsilon/kT}\frac{kT}{P_2}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2} + 1\right]$$

Uppgift 5

(a) Från Physics Handbook får vi att solens radie $R_S = 6.96 \times 10^8$ m. Om vi antar att solen strålar som en svartkropp med temperaturen 5800 K måste den totala effekten ges av

$$4\pi R_S^2 \sigma T^4 = 3.87 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$$

där σ är Stefan-Boltzmanns konstant. Den effekt per areaenhet som når jorden ges av

$$S = \frac{4\pi R_S^2 \sigma T^4}{4\pi d^2} = \left(\frac{R_S}{d}\right)^2 \sigma T^4$$

där d är avståndet mellan jorden och solen. Då $d \approx 1.5 \cdot 10^{11}$ m är $S \approx 1370\,\mathrm{W/m^2}$. Den totala effekten som når jorden ges av $\pi R_J^2 S$, där R_J är Jordens radie. Samtidigt kan vi anta att jorden själv strålar som en svartkropp, d.v.s. avger effekten $4\pi R_J^2 \sigma T^4$. Vid jämvikt måste den utstrålade effekten vara lika stor som den mottagna, vilket ger

$$4\pi R_J^2 \sigma T^4 = \pi R_J^2 S \implies T = \left(\frac{S}{4\sigma}\right)^{1/4} = 279\,\mathrm{K}$$

(b) Om 30 % av det infallande solljuset reflekteras innebär det att den mottagna effekten per areaenhet är $0.7 \cdot S$. Vi får då

$$T = \left(\frac{0.7 \cdot S}{4\sigma}\right)^{1/4} = 255\,\mathrm{K}$$

(c) Vi betraktar atmosfären som ett skikt ovanför jordytan och antar att skiktet är transparent för synliga våglängder men absorberar och emitterar infrarött ljus med emissiviteten 1. Eftersom Jorden fortfarande måste avge lika stor effekt som den tar emot måste atmosfärsskiktet avge en effekt till omgivningen som är lika stor som den mottagna effekten från solen. Skiktet måste också stråla i båda riktningar, vilket innebär att jordytan tar emot lika mycket energi från atmosfärsskiktet som från solen. Den totala mottagna effekten för jordytan blir alltså $2 \cdot 0.7 \cdot S$. Temperaturen blir

$$T = \left(\frac{2 \cdot 0.7 \cdot S}{4\sigma}\right)^{1/4} = 303\,\mathrm{K}$$