MTF052 **STRÖMNINGSMEKANIK**

Tentamen fredagen den 17 januari 2014, kl 08:30-13:30, M-huset (OBS! 5-timmarstenta)

Hjälpmedel: **Teoridelen:**
Inga hjälpmedel tillåtna

OBS! Före tentamen skall hjälpmedlen lämnas på en av vakten anvisad plats. Lösningarna på teoriuppgifterna inlämnas vid godtycklig tidpunkt, varefter hjälpmedlen får användas vid lösandet av problemen.

Problemdelen:
Tillåtna hjälpmedel är läroboken ("Fluid Mechanics", Frank M. White), Data och Diagram, matematiska tabeller, Chalmersgodkänd räknare, av institutionen utgivna formelsamlingar och material, föreläsningsanteckningar - dock **ej** lösta exempel.

Lösningar: Anslås på institutionens anslagstavla måndag 20 januari 2014

Betygsgränser: Maximal poängsumma är 85 p. Betyg 3 ≥34p, 4 ≥51p, 5 ≥68p

Tentaresultat: Meddelas senast onsdag 5 februari 2014

Granskning: Torsdag 6 februari 2014, kl 11.45-12.45
Fredag 7 februari 2014, kl 11.45-12.45

Läraren besöker salen: ca kl 9:30 och ca kl 12

Göteborg den 14 januari 2014
Alf-Erik Almstedt, tel 772 1407

TILLÄMPAD MEKANIK
Chalmers tekniska högskola
412 96 Göteborg

Besök: Hörsalsvägen 7 B, 4 tr
Telefon: 031-772 37 87
E-post: ullt@chalmers.se
Webb: www.chalmers.se/am

Chalmers tekniska högskola AB
Organisationsnummer 556479-5598

Teoriuppgifter

T1. Förklara skillnaden mellan Eulerskt och Lagrangeskt betraktelsesätt. (2p)

T2. Skriv om kontrollvolymsformuleringen av kontinuitetsekvationen

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{CS} \rho(V \cdot n)dA = 0$$

för

a) endimensionella in- och utlopp
b) stationära förhållanden
c) inkompressibel strömning och instationära förhållanden (3p)

T3. Hur definieras (volymsmedelvärderade) medelhastigheten genom en yta (för inkompressibel strömning)? (2p)

T4. Förenkla följande ekvationssystem för inkompressibel strömning med konstant temperatur. Teckna spänningstensorn med hjälp av Newtons ansats. Vilka obekanta storheter kan nu beräknas och hur många ekvationer har man till sitt förfogande?

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij}$$

$$\rho \frac{d\hat{u}}{dt} + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi$$ (5p)

T5. Definiera hydraulisk diameter och förklara hur den används vid laminär respektive turbulent rörströmning. (3p)

T6. Ange tre egenskaper som karakteriserar turbulent strömning. (3p)

T7. Förklara begreppet Reynolds dekomposition samt varför man gärna vill tidsmedelvärdera ekvationerna vid turbulent strömning. Förklara också "The closure problem" (problemet att sluta ekvationssystemet) som då uppstår. (3p)

T8. Visa att statiska trycket är oberoende av avståndet från väggen i ett laminärt tvådimensionellt gränsskikt. Utgå från NS i y-led på dimensionslös form:

$$\bar{u}\,\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\,\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right)$$

Följande storleksuppskattningar gäller och behöver ej visas:

$$\bar{u} \sim 1,\ \bar{v} \sim \bar{\delta} \text{ och } \mathrm{Re} \sim \frac{1}{\bar{\delta}^2}.$$ (4p)

T9. Härled ljudhastigheten för en godtycklig fluid. Under vilket antagande ska tryckderivatan beräknas? (6p)

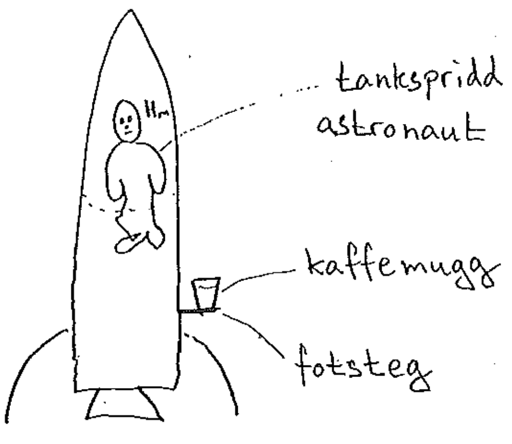
T10. Med hjälp av KE och EE på differentiell form och definitionen av ljudhastighet kan följande ekvation härledas

$$\frac{dV}{V} = \frac{dA}{A}\frac{1}{Ma^2 - 1} = -\frac{dp}{\rho V^2}$$

Visa utifrån detta samband hur hastigheten och trycket ändrar sig vid strömning genom en divergent och genom en konvergent kanal, för underljuds- respektive överljudsströmning. (4p)

Problem

P1. En tankspridd astronaut glömmer sin kaffemugg på fotsteget till sin raket. Beräkna trycket i kaffet i botten av muggen



a) i startögonblicket om muggen accelereras rakt upp tillsammans med raketen med accelerationen 7 g

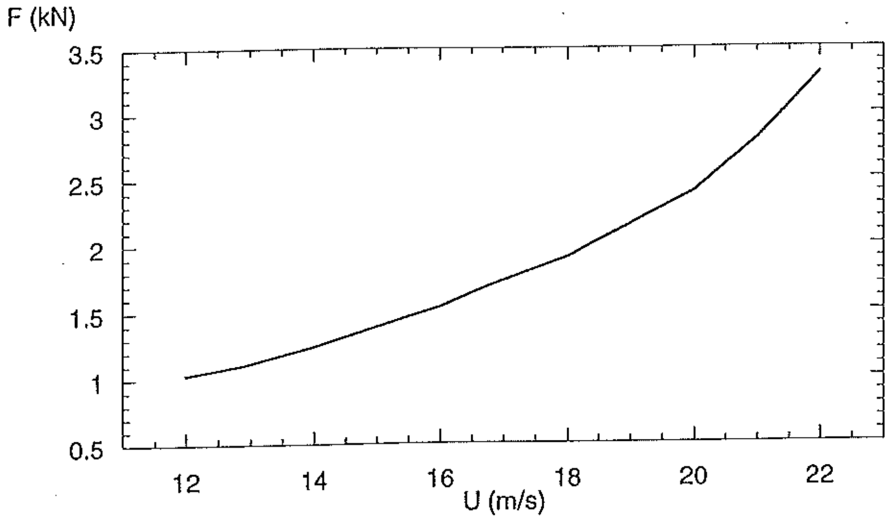
b) om muggen ramlar av forsteget i startögonblicket och precis börjar falla (antag att muggen inte välter utan faller upprättstående)

c) om muggen har fallit så länge att den uppnått konstant fallhastighet (luftmotstånd och tyngdkraft balanserar varandra).

Kaffets höjd i muggen är 5 cm och omgivningens tryck är 100 kPa (10p)

P2. För att undersöka strömningsmotståndet på ett fordon görs ett modellförsök. En 1/12 skalmodell testas i en vattentunnel. I figuren nedan visas resultatet, som strömningsmotståndet på modellen som funktion av vattnets hastighet i tunneln.

Beräkna ökningen i effekt, p g a det ökade luftmotståndet, som måste tillföras fordonet då det körs i 25 m/s i stället för 20 m/s. Både luftens och vattnets temperatur är 20°C.



(10p)

P3. I en 25 m lång rörledning med diametern 0,15 m strömmar olja av 30°C. För att bestämma massflödet genom röret placeras ett pitotrör i rörets centrum, vilket ger totaltrycket 250 kPa. I samma tvärsnitt uppmätes trycket 225 kPa vid rörväggen genom ett litet hål borrat vinkelrätt mot rörväggen. Bestäm massflödet ($\rho = 980\ \mathrm{kg/m^3}$, $\nu = 1{,}0 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}$).

Mätsektionen är placerad så långt nedströms inloppet att hastighetsprofilen kan anses fullt utbildad. (10p)

P4. En plan platta anblåses tangentiellt med luft av normaltillstånd. På avståndet 1 m från framkanten uppmäter man väggskjuvspänningen $\tau_w = 8{,}2 \cdot 10\text{-}3$ Pa.

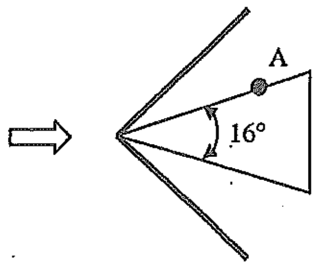
a) Beräkna anblåsningshastigheten och
b) lufthastigheten på avståndet 1 mm från väggen i denna position.

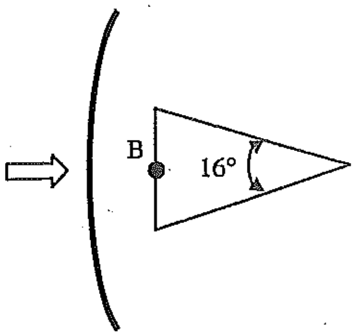
Vid ett senare tillfälle anblåses plattan med hastigheten 45 m/s.
Beräkna för detta fall

c) Väggskjuvspänningen på avståndet 1 m från plattans framkant samt lufthastigheten på
d) avståndet 1 mm från plattan i denna position. (10p)

P5. Luft strömmar vid Ma = 3 och trycket 70 kPa mot en kilformad modell av en månlandare. Kilens toppvinkel är 16° (se Fig nedan).

a) Om den spetsiga änden är riktad framåt, vad blir trycket i punkten A?
b) Om den trubbiga änden istället är riktad framåt, vad blir trycket i B?





a) b) (10p)

(2.8)

~~(2.13)~~ $\nabla p = \rho(g - a) + \mu \nabla^2 V$

Ingen relativrörelse mellan elementen

$\nabla p = \rho(g - a)$

z-axeln uppåt $\Rightarrow \frac{dp}{dz} = \rho(-g - a)$ (1)

$\uparrow z$ $p_2 = 100$ kPa, vi söker p_1

i) $a = 7g$

(1) $\Rightarrow \frac{dp}{dz} = \rho(-8g)$

$p_2 - p_1 = -8\rho g(z_2 - z_1)$

$p_1 = p_2 + 8\rho g(z_2 - z_1) =$

$= 100 \cdot 10^3 + 8 \cdot 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}05 = \underline{103{,}9 \text{ kPa}}$

b) $a = -g$

(1) $\Rightarrow \frac{dp}{dz} = \rho \cdot 0$

$\Rightarrow p = \text{konst} \Rightarrow p_1 = p_2 = \underline{100 \text{ kPa}}$

c) $V = \text{konst} \Rightarrow a = 0$

(1) $\Rightarrow \frac{dp}{dz} = -\rho g$

$p_1 = p_2 + \rho g(z_2 - z_1) = \underline{100{,}5} \text{ kPa}$

(samma som om muggen stått still, dvs hydrostatiskt, om man bortser från vakeffekter. I verkligheten minskar trycket p_2 också pga avlösning)

vatten 20°C: $\mu = 1{,}005 \cdot 10^{-3}$ $\rho = 1000$

luft 20°C: $\mu = 18{,}1 \cdot 10^{-6}$ $\rho = 1{,}2$

C_D fås vid dynamisk likf.

dvs $Re_m = Re_F$

$\frac{U_m D_m \rho_m}{\mu_m} = \frac{U_F D_F \rho_F}{\mu_F}$

$U_m = U_F \frac{D_F}{D_m} \frac{\rho_F}{\rho_m} \frac{\mu_m}{\mu_F} =$

$= U_F \frac{D}{\frac{D}{12}} \frac{\rho_L}{\rho_V} \frac{\mu_V}{\mu_L} = U_F \cdot 0{,}8$

Ur diagram fås:

	fordonhast	modellhast	kraft
D	20 m/s	16 m/s	1,5 kN
②	25 m/s	20 m/s	2,4 kN

$F_F = \frac{1}{2} \rho_L A_F C_D U_F^2$ (1)

$F_m = \frac{1}{2} \rho_V A_m C_D U_m^2 \Rightarrow$

$C_D = \frac{2 F_m}{A_m \rho_V U_m^2}$ sätt in (1)

$F_F = \frac{\rho_L}{\rho_V} \frac{A_F}{A_m} \left(\frac{U_F}{U_m}\right)^2 F_m =$

$= \frac{\rho_L}{\rho_V} \left(\frac{D}{D/12}\right)^2 \left(\frac{U_F}{U_m}\right)^2 F_m$

$= \frac{\rho_L}{\rho_V} 144 \left(\frac{U_F}{U_m}\right)^2 F_m$ (2)

(2) $\Rightarrow$

$F_F^{25} = 648$ N

$F_F^{20} = 405$ N

$P = F \cdot U$

$\Delta P = F_F^{25} \cdot 25 - F_F^{20} \cdot 20 =$

8,1 kW

Givet: $L = 25\,m$ Olja av $30°C$ $\rho = 980\ kg/m^3$

$d = 0{,}15\,m$

$p_0 = 250\,kPa$ i centrum $\nu = 1{,}0 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$

$p = 225\,kPa$

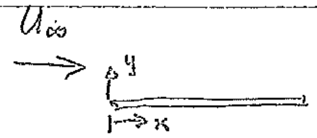
Lösning: $p_0 = p + \frac{\rho w_{mitt}^2}{2} \Rightarrow w_{mitt} = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}} = 7{,}14\ m/s$

$$Re = \frac{w \cdot d}{\nu} = k \cdot \frac{w_{mitt} \cdot d}{\nu} = k \cdot \frac{7{,}14 \cdot 0{,}15}{10^{-6}} = k \cdot 1{,}07 \cdot 10^{6}$$

Strömningen är alltså turbulent med $k \approx 0{,}82$

$$\dot{m} = \rho A w = 980 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}15^2}{4} \cdot 0{,}82 \cdot 7{,}14 = 101\ kg/s$$

Svar: $\dot{m} = 100\ kg/s$



GET: $x = 1\,m$, $\tau_{w1} = 8{,}2 \cdot 10^{-3}\,Pa$

$y = 1\,mm$ $U_{\infty 2} = 45\ m/s$

Luft av normaltillstånd $\Rightarrow \begin{cases} \rho = 1{,}189\ kg/m^3 \\ \nu = 15{,}2 \cdot 10^{-6}\ m^2/s \end{cases}$

SÖKT: a) $U_{\infty 1}$ b) $u_1(x,y)$

c) τ_{w2} d) $u_2(x,y)$

LÖSNING: a) Bestäm om gränsskiktet är laminärt eller turbulent:

(7.25) $\Rightarrow c_{f,lam} = \frac{0{,}664}{\sqrt{Re_x}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \tau_{w,lam} = \frac{1}{2}\rho U_{\infty,lam}^2 \cdot 0{,}664 \sqrt{\frac{\nu}{U_{\infty,lam} \cdot x}} \Rightarrow$

$U_{\infty,lam} = \left(\tau_{w,1} \frac{1}{0{,}664} \cdot \frac{2}{\rho}\sqrt{\frac{x}{\nu}}\right)^{2/3} = 3{,}05\,m/s$

$\Rightarrow Re_{x,lam} = \frac{U_{\infty,lam} \cdot x}{\nu} = 2{,}01 \cdot 10^5$ ∴ OK.

(7.43) $\Rightarrow c_{f,turb} = \frac{0{,}027}{Re_x^{1/7}} \Rightarrow \tau_{w,turb} = \frac{1}{2}\rho U_{\infty,turb}^2 \cdot 0{,}027 \left(\frac{\nu}{U_{\infty,turb} \cdot x}\right)^{1/7}$

$\Rightarrow U_{\infty,turb} = \left(\tau_{w,1} \cdot \frac{2}{\rho} \cdot \frac{1}{0{,}027}\left(\frac{x}{\nu}\right)^{1/7}\right)^{7/13} = 1{,}635\,m/s$

$\Rightarrow Re_{x,turb} = \frac{U_{\infty,turb} \cdot x}{\nu} = 1{,}08 \cdot 10^5$ ej OK

∴ Laminärt gränsskikt $\Rightarrow$

$\underline{U_{\infty 1}} = U_{\infty,lam} = \underline{3{,}05\ m/s}$

b) Lam. g.s, se Tab. 7.1 s. 397 med

$y \cdot \sqrt{\frac{U_{\infty,lam}}{\nu x}} = 0{,}448 \Rightarrow \frac{u}{U_{\infty,lam}} \approx 0{,}15$

efter interpolation $\Rightarrow \underline{u_1(x,y) = 0{,}46}$ m/s

c) $U_{\infty 2} = 45\,m/s \Rightarrow Re_{x,2} = \frac{U_{\infty 2} \cdot x}{\nu} = 3{,}0 \cdot 10^6$

turbulent.

(7.43) $\Rightarrow \underline{\tau_{w,2}} = \frac{1}{2}\rho U_{\infty,2}^2 \cdot 0{,}027 \left(\frac{\nu}{U_{\infty,2} \cdot x}\right)^{1/7}$

$\approx \underline{3{,}87\ Pa}$

d) (7.34) $\Rightarrow u^* = \sqrt{\frac{\tau_{w,2}}{\rho}} = 1{,}0836\,m/s$

$\frac{u(x,y)}{u^*} = \frac{1}{\kappa}\ln\frac{y u^*}{\nu} + B$

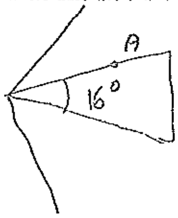
med $\kappa = 0{,}41$ och $B = 5{,}0$

$\Rightarrow \underline{u_2(x,y)} = \underline{30{,}0\ m/s}$

koll: $\frac{u^* y}{\nu} = \frac{1{,}0836 \cdot 0{,}001}{15{,}2 \cdot 10^{-6}} = 71$

F4 01-01-11

a) Ma = 3 → P = 70 kPa Luft ⇒ k = 1,4



För $Ma_1 = 3$; $\theta = 8°$ ger ekv (9.86)

$$\tan\theta = \frac{2\cot\beta\,(Ma_1^2\sin^2\beta - 1)}{Ma_1^2\,(k + \cos 2\beta) + 2}$$

Iterering ⇒ $\beta = 25{,}61°$

$$\frac{P_A}{P_1} = \frac{1}{k+1}\cdot\left[2k\cdot Ma_1^2\sin^2\beta - (k-1)\right] \quad (9.83a)$$

$\Rightarrow \underline{P_A = 126 \text{ kPa}}$

b) En normal stöt formas

$\Rightarrow P_B = P_{02}$

Tabell B1 ⇒ $P_{01} = P/0{,}0272 = 2574$ kPa

Tabell B2, $Ma = 3$ ⇒ $P_{02}/P_{01} = 0{,}3283$

$P_{02} = P_B = 0{,}3283 \cdot 2574 \text{ kPa} = \underline{845 \text{ kPa}}$.