Storgruppsövning 18/10-13

5.5 Z-transformer

Definition

Låt $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$ vara en sekvens av $\mathbb{C}$-tal s.a $|a_j| \leq M r^j$, $M, r > 0$

$Z(\{a_j\}_{j=0}^{\infty}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{z^j}$ kallas för Z-transf. av $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$

Konvergent om $|z| > r$.

5.5.2

Finn $Z(\{a_j\})$ om $a_j = \begin{cases} 0 & j \text{ jämn} \\ (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} & j \text{ udda}, \; j = 2k+1 \end{cases}$

Lösn: $Z(\{a_j\}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{z^j} =$

$$= \sum_{\substack{j \text{ udda} \\ j>0}} \frac{a_j}{z^j} = \{ j = 2k+1 \} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{z}\right)^{2k+1} =$$

$$= \sin\left(\frac{1}{z}\right)$$

Egenskaper

I) Z linjär, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow Z(\{\lambda_1 a_j + \lambda_2 b_j\}) = \lambda_1 Z(\{a_j\}) + \lambda_2 Z(\{b_j\})$

Givet $\{a_j\}, \{b_j\}$ definiera $\{c_j\}$ genom

$c_j = \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}$

$c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$, $c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$

$\{c_j\} \overset{\text{def.}}{=} \{a_j\} * \{b_j\}$ (diskreta) faltningen

II) $Z(\{c_j\}) = Z(\{a_j\}) \cdot Z(\{b_j\})$

III) $Z(\{a_{j+k}\}_{j=0}^{\infty}) = z^k Z(\{a_j\}_{j=0}^{\infty}) - z^k a_0 -$
$- z^{k-1} a_1 - z^{k-2} a_2 - \ldots - z a_{k-1}$

5.5.17

Lös differensekv.

$$\begin{cases} y_n - y_{n+1} = x_n + x_{n+1} + x_{n+2} , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

(dvs skriv y_j som fkn av $\{x_j\}$)

lösn: Låt $w_n = x_n + x_{n+1} + x_{n+2}$

$Y(z) = Z(\{y_n\})$, $W(z) = Z(\{w_n\})$

Z-transf. differensekv.:

$Z(\{y_n - y_{n+1}\}) = \{ \text{I}) \} = Z(\{y_n\}) - Z(\{y_{n+1}\}) =$

$= \{ \text{III}), k=1 \} = Y(z) - (z Y(z) - z y_0) =$

$= (1-z) Y(z) + z = W(z)$

$$\Rightarrow Y(z) = -\frac{z}{1-z} + \frac{1}{1-z} W(z)$$

$$Y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y_j}{z^j}, \quad \frac{z}{1-z} = \frac{\cancel{-z}}{\underbrace{\cancel{-z}(1-\frac{1}{z})}_{(*)}}, \quad \frac{1}{1-z} = \frac{1}{\underbrace{-z(1-\frac{1}{z})}_{(+)}}, \quad W(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w_j}{z^j}$$

$$Y(z) = \overbrace{(1 + 1/z + 1/z^2 + 1/z^3 + \ldots)}^{(*)} - 1/z \overbrace{(1 + 1/z + 1/z^2 + 1/z^3 + \ldots)}^{(+)} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n + x_{n+1} + x_{n+2}}{z^n} \right) =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}}_{1.} - \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}\right)}_{2.} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n + x_{n+1} + x_{n+2}}{z^n}\right)}_{3.}$$

1. z-transf. av $\{a_j\} = \{1, 1, 1, \ldots\}$
2. — " — $\{b_j\} = \{0, 1, 1, \ldots\}$
3. — " — $\{c_j\} = \{x_0 + x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \ldots\}$

$$\therefore \{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \{a_n\}_{n=0}^{\infty} - \{b_n\}_{n=0}^{\infty} * \{c_n\}_{n=0}^{\infty} =$$

$$= \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_n = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} c_k b_{k-n} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} c_k = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} (x_k + x_{k+1} + x_{k+2}) \end{cases}$$

fel i facit!

Tenta 2012-10-25

3. Bestäm det största R s.a fknen $\frac{\sin z}{z^2(z^2-1)} = f(z)$ kan Laurentserieutvecklas i området $\{0 < |z| < R\}$. Bestäm de fem första termerna i utvecklingen.

Laurentserie = Potensserie där negativa potenser av z är tillåtna.

Lösn.: $f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z-1)(z+1)}$

$\exists\ A, B, C, D \in \mathbb{C}$ s.a

$$f(z) = \sin z \left(\frac{Az + B}{z^2} + \frac{C}{z-1} + \frac{D}{z+1} \right) =$$

$= \sin z \left(\frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-1} + \frac{D}{z+1} \right)$

Vill utveckla dessa i Potenser av z, inte i Potenser av $1/z$ då serien ska konv. i $\{0 < |z| < R\}$

$\frac{C}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$ om $|z| < 1$

$\frac{D}{1+z} = \frac{D}{1-(-z)} = 1 - z + z^2 - \dots$ om $|-z| = |z| < 1$

$\Longrightarrow R = 1$

$f(z)$ har en pol av ordning 1 i origo $(\sin 0 = 0)$

$\Longrightarrow \frac{\sin z}{z^2(z^2-1)} = \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$

$\sin z = z^2(z^2-1)\left(\frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \right) =$

$= + a_{-1} z(z^2-1) + a_0 z^2 (z^2-1) + a_1 z^3 (z^2-1) +$

$+ a_2 z^4 (z^2-1) + a_3 z^5 (z^2-1) + \dots =$

$= -a_{-1} z - a_0 z^2 + (a_{-1} - a_1) z^3 + (a_0 - a_2) z^4 +$

$+ (a_1 - a_3) z^5 + \dots = \{\sin z\} =$

$= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$

$\Longrightarrow -a_{-1} = 1 \Longleftrightarrow a_{-1} = -1$

$-a_0 = 0 \Longleftrightarrow a_0 = 0$

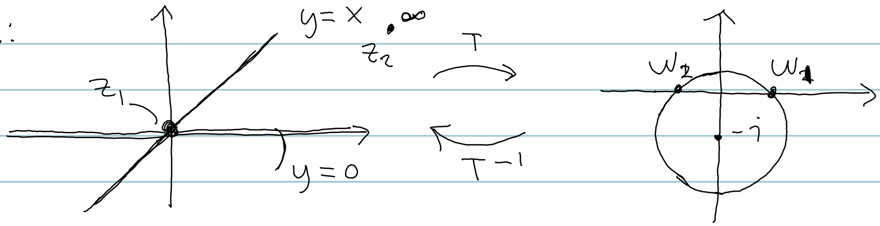
$a_{-1} - a_1 = -1/6 \Longleftrightarrow a_1 = -5/6$

$\vdots$

3.3.7 d)

Hitta en Möbiusavb. T som avbildar $\mathbb{R}$ på $\mathbb{R}$ och den räta linjen $y = x$ på cirkeln $|w + i| = \sqrt{2}$

lösa:



$w_1 = 1,\ w_2 = -1 \longrightarrow z_1 = 0,\ z_2 = \infty$

$T^{-1}(w) = \dfrac{w-1}{w+1}$ OK ty reella koeff. $(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$

$w = T(z) \Longrightarrow T^{-1}(w) = T^{-1}(T(z)) = z$

Lös ut $w = T(z)$ ur: $z = \dfrac{w-1}{w+1}$

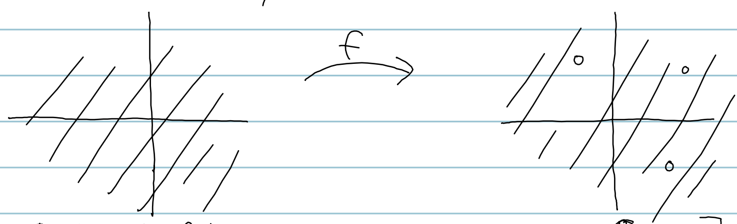
$\Longrightarrow \ldots \Longrightarrow w = T(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$

Tenta 2010-01-11

5. f icke-konstant, hel fkn, $w_0 \in \mathbb{C}$

Påst.: w_0 är en hopningspkt för mängden $\{w = f(z) ; z \in \mathbb{C}\}$

dvs,



Bevis: Påst. $\Longleftrightarrow$ för godt. fixt $w_0 \in \mathbb{C}$ $\exists \{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ s.a $f(z_n) \to w_0$ då $n \to \infty$

$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ kan vi hitta $z \in \mathbb{C}$ s.a $|f(z) - w_0| < \varepsilon$

Fall 1: $\exists z \in \mathbb{C}$ s.a $f(z) = w_0$ OK!

Fall 2: $\nexists\, z \in \mathbb{C}$ s.a $f(z) = w_0$

Antag w_0 ej hopningspunkt

$\Longrightarrow \exists\, C > 0$ s.a $|f(z) - w_0| \geq C \quad \forall z \quad (*)$

Låt $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - w_0}$

$(*)$ och f hel fkn $\Longrightarrow$ g hel fkn

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - w_0|} \leq \frac{1}{C} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$\Longrightarrow$ g begränsad $\xRightarrow{\text{Liouville}}$ $g \equiv \text{konstant} = D$

$\Longleftrightarrow$

$f(z) = w_0 + 1/D = \text{konstant}$ ↯ (motsägelse)

$\therefore$ w_0 hopningspunkt för

$\{ w = f(z) ;\ z \in \mathbb{C} \}$