

1 Tenta i komplex analys, F/ Kf och TM, MVE 025 och MVE 295

2013 08 30, 14.00-18.00

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna

Telefonvakt: Bo Berndtsson 772 35 39

1. a) Beräkna integralerna

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z - e^{-z}}{z} dz$$

(3p)

- b)

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} dz.$$

(4p)

2. Beräkna Fouriertransformen av funktionen

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4}.$$

(7p)

3. Visa att alla nollställen till polynomet $z^4 + z^3 + 1$ ligger i cirkelringen $\{z; 3/4 < |z| < 3/2\}$.

(7p)

4. Vilken funktion har Laplacetransformen

$$\frac{e^{-2s}}{(s-1)(s-3)}?$$

(7p)

5. a) Låt $|a| < 1$. Visa att funktionen

$$M(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$$

avbildar enhetsskivan ($\{|z| < 1\}$) konformt på sig själv.

(4p)

- b) Låt f vara en holomorf funktion i enhetsskivan som uppfyller $|f(z)| < 1$ för alla z i enhetsskivan. Antag det finns en punkt a där $f(a) = 0$ och $|a| < 1$. Visa att

$$|f(z)| \leq \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|.$$

(3p)

6. a) Definiera den komplexa derivatan av en funktion definierad i ett område i det komplexa planet.

(1p)

- b) Visa att om funktionen f har en komplex derivata i en punkt $a \in \mathbb{C}$ så uppfyller f Cauchy Riemanns ekvationer i den punkten. (4p)

7. Bevisa Cauchy's integralformel. (5p)

8. Låt P och Q vara polynom av grad n och m där $m \geq n$ och antag att P har nollställena z_j där $|z_1| < |z_2| < \dots < |z_n|$. Visa att Q är delbart med P om och endast om integralerna

$$\int_{|z|=r} \frac{Q}{P} dz,$$

är noll för alla $r \neq |z_j|$.

(5p)

Lycka till!,
BB

Augusti kuu

2013

1. a) $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots$

$$e^{-z} = 1 - \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} - \dots$$

$$\frac{(e^z - e^{-z})}{z} = \left[z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \right]$$

$\therefore \frac{e^z - e^{-z}}{z}$ pole i 0.

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z - e^{-z}}{z} dz = 0.$$

$|z|=1$

b) $\frac{e^z - e^{-z}}{z^4} = \left[\frac{1}{z^3} + \frac{1}{2 \cdot 3!} + \dots \right]$

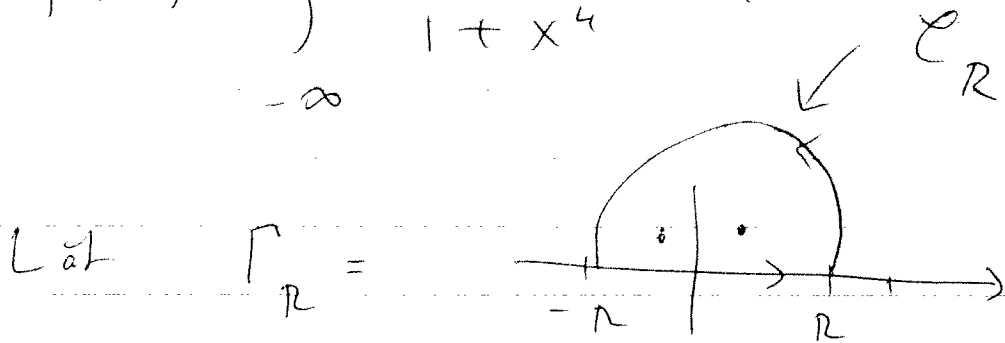
$$\text{Res} \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$$

$$\int \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} = \frac{2\pi i}{3}$$

$|z|=1$

2. $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$

$$\hat{f}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{1+x^4} dx$$



Singulära punkter är

$$\frac{e^{-iaz}}{1+z^4} \quad ; \quad z^4 = -1 = e^{i\pi}$$

$$z = e^{i\pi/4 + ik\pi/2}$$

i öHP $z_0 = e^{i\pi/4}$, $z_1 = e^{3\pi/4}$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{-iaz}}{1+z^4} dz = 2\pi i \left[\text{Res}_{z_0} + \text{Res}_{z_1} \right]$$

$$= 2\pi i \left[\frac{e^{-iaz_0}}{4z_0^3} + \frac{e^{-iaz_1}}{4z_1^3} \right] =$$

(enkelpoler!)

$$= \frac{a\pi i}{2} \left[z_0 e^{-ia z_0} + z_1 e^{-ia z_1} \right] (-1)$$

(Förkläs med z_0 resp z_1 & utnyttja

$$z_0^4 = z_1^4 = -1)$$

$$z_0 = e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad z_1 = e^{3\pi i/4} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$$

$$\int_{\Gamma_R} = \frac{-\pi i}{2} \left[e^{-ia(1+i)/\sqrt{2} + i\pi/4} + e^{-ia(-1+i)/\sqrt{2} + 3\pi i/4} \right]$$

$$= \frac{-\pi i}{\sqrt{2}} e^{a/\sqrt{2}} \left[e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{\sqrt{2}})} + e^{i(\frac{3\pi}{4} + \frac{a}{\sqrt{2}})} \right]$$

$$= \frac{-\pi i}{\sqrt{2}} e^{a/\sqrt{2}} \left[e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{\sqrt{2}})} - e^{-i(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{\sqrt{2}})} \right]$$

$$= \pi e^{a/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

$P_a \in \mathbb{R}$:

$$\left| \frac{e^{-iaz}}{1+z^4} \right| \leq \frac{e^{ay}}{R^4-1} \leq \frac{1}{R^4-1}$$

om $a \leq 0$.

$$\therefore \left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{-iaz}}{1+z^4} dz \right| \leq \frac{2\pi R}{R^4-1} \rightarrow 0.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{1+x^4} dx = \pi \sqrt[4]{2} e^{a/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

om $a < 0$. om $a > 0$ \int_a^{∞}

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{1+x^4} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(-a)x}}{1+x^4} dx$$

$$= \pi \sqrt[4]{2} e^{-a/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

\square

$$3) \quad p(z) = z^4 + z^3 + 1$$

Samma som jakvari.

$$4. \quad \tilde{u}(s) = \frac{e^{-2s}}{(s-1)(s-3)}$$

$$(i) \quad \tilde{v}(s) = \frac{1}{(s-1)(s-3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-3} - \frac{1}{s-1} \right)$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{2} [e^{3t} - e^t] \quad t > 0.$$

$$(ii) \quad \mathcal{L}(v(t-2))(s) = e^{-2s} \tilde{v} = \tilde{u}$$

$$\therefore u = v(t-2) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} [e^{3(t-2)} - e^{(t-2)}] & \text{om } t > 2 \\ 0 & \text{om } t < 2, \end{cases}$$

5 a) Visa att

$$M(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}, \quad |a| < 1$$

avbildar enhetscirkeln $\{|z| < 1\}$

konformt på sig själv.

(i) Tas 3 punkter på cirkeln

$$|z| = 1, \quad -1, i, 1$$

$$M(-1) = \frac{a-1}{1-\bar{a}}$$

$$\therefore |M(-1)| = \frac{|a-1|}{|1-\bar{a}|} = 1$$

$$M(1) = \frac{1+a}{1+\bar{a}}; \quad |M(1)| = 1$$

$$\begin{aligned} M(i) &= \frac{i+a}{1+i\bar{a}}; \quad |M(i)| = \frac{|i+a|}{|1-ia|} = \\ &= \frac{|i+a|}{|-i(i+a)|} = 1. \end{aligned}$$

M avbildar alltså 3 7.

punkter på enhetscirkeln på enhetscirkeln.

$\therefore M$ avbildar enhetscirkeln på enhetscirkeln.

(ii) Det följer att M avbildar enhetsdisken på sig själv eller på området utanför enhetscirkeln. Men

$$M(0) = a \in \text{enhetsdisken},$$

$\therefore M$ avbildar enhetsdisken på sig själv.

(b) Antag f holomorf i enhetsdisken
& $f(a) = c$ & $|f(z)| \leq 1$

Da låt $g(w) = f(M(w))$

$g(c) = 0$. Schwartz lemma \Rightarrow

$$|g(w)| \leq |w|$$

$$\therefore |g(M^{-1}(z))| \leq |M^{-1}(z)|$$

8

$$\therefore |f(z)| \leq |M^{-1}(z)| = \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|$$

8. P & Q är polynom

P har nollställena z_1, \dots, z_n

av grad n resp. m, $m \geq n$

P har nollställena z_1, \dots, z_n

$$|z_1| < |z_2| < \dots < |z_n| \quad \&$$

$$\int_{|z|=r} \frac{Q}{P} dz = 0 \quad r \neq |z_j|$$

Välj först r ; $|z_1| < r < |z_2|$

$$\int_{|z|=r} \frac{Q}{P} dz = 2\pi i \frac{Q(z_1)}{P'(z_1)} = 0$$

$$\therefore Q(z_1) = 0.$$

välj sedan

9.

$$|z_1| < r < |z_2|$$

$$0 = \int_{|z|=r} \frac{Q}{P} dz = 2\pi i \left[\frac{Q(z_1)}{P'(z_1)} + \frac{Q(z_2)}{P'(z_2)} \right]$$

$$\therefore Q(z_2) = 0$$

Fortsätt!