OBS! Denna samling av matematiska definitioner och satser är inofficiell och gjorde av studenter.
Vi reserverar oss vid eventuella felskrivningar.

Teori för flervariabelsanalys

Robin Andersson

28 oktober 2013

Innehåll

Inledning

Bevis som berör kursen analys i flera variabler för F och TM på Chalmers. Det finns ingen garanti på att detta är helt felfritt, men ev. fel bör inses lätt. För eventuella synpunkter eller upptäckta fel skicka gärna iväg ett mail till *robiand@student.chalmers.se*

1 Differentierbarhet

Sats: 1 *Varje C^1- funktion ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$) är differentierbar.*

Bevis:

Vi väljer att betrakta en funktion f av två variabler. Låt (a,b) vara en given punkt i definitionsmängden för f. Vi betraktar följande differens på grund av definitionen av differentierbarhet

$$f(a+h,b+k) - f(a,b).$$

Inför hjälppunkten $(a,b+k)$. Vi får då att

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = [f(a+h,b+k) - f(a,b+k)] + [f(a,b+k) - f(a,b)].$$

Sätt

$$\varphi(h) - \varphi(0) = f(a+h,b+k) - f(a,b+k).$$

Enligt medelvärdessatsen för funktioner av en variabel (ty $\varphi(t)$ kan betraktas som en funktion av en variabel) har vi att

$$f(a+h,b+k) - f(a,b+k) = \varphi(h) - \varphi(0) = \varphi'(\theta_1 h)h = f'_x(a+\theta_1 h,b+k)h,$$

där $0 < \theta_1 < 1$. Eftersom f'_x enligt vår förutsättning är kontinuerlig kan vi då skriva

$$f'_x(a+\theta_1 h,b+k) = f'_x(a,b) + \varrho_1(h,k),$$

där

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varrho_1(h,k) = 0.$$

På samma sätt gäller

$$f(a,b+k) - f(a,b) = f'_y(a,b+\theta_2 k)k = f'_y(a,b)k + k\varrho_2(h,k),$$

där $0 < \theta_2 < 1$, och

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varrho_2(h,k) = 0.$$

Alltså gäller att vår differens i början kan skrivas som

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = f'_x(a,b)h + h\varrho_1(h,k) + f'_y(a,b)k + k\varrho_2(h,k) =$$

$$f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k + \sqrt{h^2+k^2}\,\varrho(h,k),$$

där

$$\varrho(h,k) = \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\varrho_1(h,k) + \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\varrho_2(h,k).$$

Det gäller att $\varrho(h,k) \to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$ ty funktionerna ϱ_1, ϱ_2 har denna egenskap, samt att faktorerna framför är begränsade, till exempel

$$\left|\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq 1 \qquad \square.$$

2 Kedjeregeln

Sats: 2 *Låt $f(\mathbf{x}) = f(x_1,...,x_n)$ vara en differentierbar funktion av n variabler, och antag att $g_1(t),...,g_n(t)$ är deriverbara i intervallet $a < t < b$ på $\mathbb{R}$. Då är den sammansatta funktionen $f(\mathbf{g}(t))$ också deriverbar i intervallet och*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(\mathbf{g}(t))) = f'_{x_1}(\mathbf{g}(t)) \cdot g'_1(t) + ... + f'_{x_n}(\mathbf{g}(t)) \cdot g'_n(t).$$

Bevis:

Vi bevisar fallet då f enbart beror av två variabler för att förenkla alla de beteckningar. Enligt definitionen av derivata undersöker vi gränsvärdet av differenskvoten

$$\frac{f(\mathbf{g}(t+k)) - f(\mathbf{g}(t))}{k}, \text{ då } k \to 0.$$

Eftersom f är differentierbar gäller att

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = f'_{x_1}(\mathbf{x})h_1 + f'_{x_2}(\mathbf{x})h_2 + |\mathbf{h}|\varrho(\mathbf{h}),$$

där $\varrho(\mathbf{h}) \to 0$ då $\mathbf{h} \to 0$ och $\varrho(0) = 0$. Om vi sätter

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(t), \text{ och } \mathbf{h} = \mathbf{g}(t+k) - \mathbf{g}(t),$$

så fås att $\mathbf{x} + \mathbf{h} = \mathbf{g}(t+k)$. Alltså

$$\frac{f(\mathbf{g}(t+k)) - f(\mathbf{g}(t))}{k} =$$

$$= f'_{x_1}(\mathbf{g}(t))\frac{g_1(t+k)-g_1(t)}{k} + f'_{x_2}(\mathbf{g}(t))\frac{g_2(t+k)-g_2(t)}{k} + \frac{|\mathbf{h}|}{k}\varrho(\mathbf{h}).$$

Enligt definition har vi att

$$f'_{x_1}(\mathbf{g}(t))\frac{g_1(t+k)-g_1(t)}{k} + f'_{x_2}(\mathbf{g}(t))\frac{g_2(t+k)-g_2(t)}{k} \underset{k\to 0}{\longrightarrow}$$

$$\underset{k\to 0}{\longrightarrow} f'_{x_1}(\mathbf{g}(t))g'_1(t) + f'_{x_2}(\mathbf{g}(t))g'_2(t).$$

Vidare har vi också att

$$\mathbf{h} = \mathbf{g}(t+k) - \mathbf{g}(t) \underset{k\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

ty $\mathbf{g} = (g_1,g_2)$ är kontinuerlig och att

$$\frac{\mathbf{h}}{k} = \frac{\mathbf{g}(\mathbf{t}+\mathbf{k}) - \mathbf{g}(\mathbf{t})}{k} \underset{k\to 0}{\longrightarrow} (g'_1(t), g'_2(t)).$$

Följaktligen går vår restterm $\dfrac{|\mathbf{h}|}{k}\varrho(\mathbf{h})$ mot 0. Därmed har vi visat att differenskvoten i början existerar, vilket innebär att funktionen $f(\mathbf{g}(t))$ är deriverbar.

$\square$

3 Formel för beräkning av riktningsderivatan av en differentierbar funktion

Sats: 3 *Om f är en differentierbar funktion och $\mathbf{v}$ en given riktning med $|\mathbf{v}| = 1$ så är*

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}.$$

Bevis:

Sätt

$$u(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}).$$

Funktionen u beskriver uppförandet av f på linjen $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$. Vi ser att

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \lim_{t\to 0}\frac{u(t)-u(0)}{t} = u'(0).$$

Eftersom f är en differentierbar funktion fås enligt kedjeregeln att

$$u'(t) = \nabla f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}.$$

Därmed då $t = 0$ ges

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}. \qquad \square$$

4 Taylors formel (av ordning 2 med restterm av ordning 3)

Sats: 4 *Låt $f(x,y)$ vara en $\mathbf{C}^3-$funktion i den öppna mängden D, och antag att punkten (a,b) tillhör D. Då är*

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k +$$

$$+\frac{1}{2}(f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2) + (h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}B(h,k),$$

där $B(h,k)$ är en begränsad funktion i en omgivning av origo.

Bevis:
Vi betraktar situationen på det endimensionella fallet

$$F(t) = f(a+th,b+tk), \qquad 0 \le t \le 1.$$

Det är klart att $F \in \mathbf{C}^3$ varför vi får enligt Maclaurins formel för funktioner av en variabel

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \frac{F'''(\theta t)}{3!}t^3$$

för något θ, $0 \le \theta \le 1$, enligt kedjeregeln fås

$$F'(t) = f'_x(a+th,b+tk)h + f'_y(a+th,b+tk)k,$$

därefter

$$F''(t) = f''_{xx}(a+th,b+tk)h^2 + 2f''_{xy}(a+th,b+tk)hk + f''_{yy}(a+th,b+tk)k^2.$$

Då $t=1$ får vi

$$f(a+h,b+k) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \frac{1}{6}F'''(\theta)$$

med

$$\begin{cases} F(0) = f(a,b) \\ F'(0) = f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k \\ F''(0) = f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2. \end{cases}$$

Det återstår att visa att $F'''(\theta)/6$ kan skrivas som $(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}B(h,k)$.

Vid derivering av $F''(t)$ ses att $F'''(t)$ består av en summa innehållande tredje ordningens derivator av f med motsvarande potenser av h och k som koefficinter, t.ex. termen $3f'''_{xxy}(a+th,b+tk)h^2k$. Alla derivator av tredje ordningen är kontinuerliga och därför begränsade i en omgivning av (a,b). Vidare följer av olikheterna

$$|h| \leq \sqrt{h^2+k^2}, \qquad |k| \leq \sqrt{h^2+k^2}$$

att faktorerna h^3, h^2k, hk^2 och k^3 kan uppskattas med $(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}$. Därmed följer att varje term i $\frac{1}{6}F'''(\theta)$ till beloppet är $\leq$ *konstant* $\cdot (h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}$. Om resttermen divideras med $(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}$ blir resultatet en begränsad funktion. $\square$.

5 Om max/min-problem med bivillkor

Sats: 5 *Antag $f \in \mathbf{C}^1$, $g \in \mathbf{C}^1$ (reellvärda). Om f har max eller min under bivillkoret $g = 0$ i en punkt (a,b) i det inre av både D_f och D_g*

$$\Rightarrow \nabla f(a,b) \text{ och } \nabla g(a,b) \text{ är linjärt beroende.}$$

Bevis:

1. Antag $\nabla g(a,b) = \mathbf{0}$.

   Då är förstås $\nabla g(a,b)$ och $\nabla f(a,b)$ linjärt beroende och saken är klar.

2. Antag $\nabla g(a,b) \neq \mathbf{0}$.

Vi tittar då på nivåkurvan $g(x,y) = 0$ kring (a,b). Eftersom $g'_x \neq 0$ eller $g'_y \neq 0$ i (a,b) så har vi enligt implicita funktionssatsen att x eller y är lokalt en $\mathbf{C}^1-$funktion av den andra.

$$\Rightarrow \text{Kurvan } g(a,b) = 0 \text{ lokalt kring } (a,b) \text{ har en } \mathbf{C}^1 - \text{parameterisering,}$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}.$$

Vi inför funktionen ϕ av en variabel

$$\phi(t) = f(x(t),y(t)).$$

På kurvan $g(x,y) = 0$ har $\phi(t) = f(x(t),y(t))$ ett max eller min i (a,b) där $t = t_0$. Det vill säga $\phi'(t_0) = 0$. Då gäller enligt kedjeregeln

$$\nabla f(x(t_0),y(t_0)) \cdot (x'(t_0), y'(t_0)) = 0.$$

Eftersom ∇g i denna punkt är vinkelrät mot (x',y') och ∇f också, så

$$\Rightarrow \nabla f \parallel \nabla g, \text{ det vill säga linjärt beroende i } (a,b). \qquad \square$$

6 Integrerbarhet av kontinuerliga funktioner på kompakta rektanglar

Sats: 6 *Om $f(x,y)$ är kontinuerlig på den kompakta rektangeln $\Delta = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ så är f integrerbar över Δ.*

Bevis:

Givet ett tal $\varepsilon > 0$. Vi skall konstruera två funktioner ϕ, ψ, d.v.s.

$$\psi, \phi \in \Delta : \phi \leq f \leq \psi : \iint_\Delta \psi - \iint_\Delta \phi < \varepsilon.$$

Eftersom området Δ är kompakt och f kontinuerlig på Δ är f likformigt kontinuerlig på Δ. Då gäller att

$$\exists \delta > 0 : |f(x,y) - f(x',y')| < \frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)} \forall (x,y) : |x-y| < \delta \text{ och } \forall (x',y') : |x'-y'| < \delta$$

Vi delar in området Δ i ändligt många delrektanglar Δ_k, $k = 1,2,...,n$, där Δ_k har diagonallängden högst δ. Låt också

$$m_k = \min_{m_k \in \Delta_k} f,\ M_k = \max_{M_k \in \Delta_k} f.$$

Det gäller att

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)}.$$

Därmed definierar vi ϕ, ψ på Δ genom att tilldela de värdet m_k respektive M_k i Δ_k. Då gäller att $\phi \leq f \leq \psi$ och

$$\iint_\Delta \psi \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_\Delta \phi \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\mu(\Delta_k) < \frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)} \sum_{k=1}^{n} \mu(\Delta_k) = \varepsilon.$$

Enligt definitionen visar detta att f är integrerbar över Δ. $\square$

7 Härledning av Gauss integral

Sats: 7 *Observera "sats". Visa att*

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi.$$

"Bevis:"

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2},\ D = \mathbb{R}^2.$$

Vi väljer $D_n = \{(x,y);\ x^2 + y^2 \le n^2\}$. Vi får då

$$\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left\{\begin{array}{l} \text{polära koordinater, } x^2+y^2=r^2 \\ |J| = r,\ 0 \le r \le n,\ 0 \le \theta < 2\pi \end{array}\right\} =$$

$$= \iint_{D_n} e^{-r^2} \cdot r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^n re^{-r^2}\,\mathrm{d}r = 2\pi\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^n =$$

$$= \pi(-e^{-n^2}+1).$$

Gäller det att

$$I \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty} I_n = \pi\ ?$$

Vi undersöker ifall så är fallet.
Sätt $E_n = \{(x,y);\ -n \le x \le n,\ -n \le y \le n\}$. Därav fås

$$\iint_{E_n} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-n}^{n} \mathrm{d}x \int_{-n}^{n} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \int_{-n}^{n} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_{-n}^{n} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi.$$

Det vill säga

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

8 Greens Formel

Se bilden i boken till beviset, eller figur 1.

Sats: 8 *Låt P och Q vara två* $\mathbf{C}^1-$*funktioner definierade i en öppen mänd Ω i planet. Om det kompakta delområdet D av Ω har en positivt orienterad rand ∂D som utgöres av en eller flera styckvis* $\mathbf{C}^1-$*kurvor så*

$$\Rightarrow \int_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Bevis:

Vi genomför beviset med den extra förutsättning att D medelst räta linjer parallella med y-axeln kan delas upp i ett ändligt antal områden av typen

$$E = \{(x,y) : \varphi(x) \leq y \leq \psi(x),\, a \leq x \leq b\},$$

och att det finns en motsvarighet för $x-$axeln.

Vi vill visa att för ett sådant område E gäller

$$\int_{\partial E} P\,\mathrm{d}x = \iint_E -\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Vi börjar med högerledet och får då

$$\iint_E -\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{x=a}^{b} \left(\int\limits_{y=\varphi(x)}^{\psi(x)} -\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_{x=a}^{b} \left[-P(x,y)\right]_{y=\varphi(x)}^{\psi(x)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} P(x,\varphi(x))\,\mathrm{d}x - \int\limits_{a}^{b} P(x,\psi(x))\,\mathrm{d}x.$$

Vi uttrycker γ (ett kurvstycke av ∂D) i parameterframställning med x som parameter och får

$$\mathbf{r} = (x,\varphi(x)), \qquad a \leq x \leq b.$$

Därför får vi att den första integralen i högerledet är lika med

$$\int_\gamma P\,\mathrm{d}x + 0\,\mathrm{d}y = \int_\gamma P\,\mathrm{d}x.$$

På samma sätt fås för den högra integralen i högerledet (för ett kurvstycke σ)

$$-\int\limits_{a}^{b} P(x,\psi(x))\,\mathrm{d}x = \int_\sigma P\,\mathrm{d}x.$$

Alltså

$$\iint_E -\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial E} P\,\mathrm{d}x,$$

ty kurvintegralen av $P\,\mathrm{d}x$ längs eventuella vertikala randstycken är noll. Genom addition av detta resultat för alla uppkomna delområden E av D får vi

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial D} P\,\mathrm{d}x,$$

ty de inre vertikala linjestyckena ger inget nettobidrag. Analogt fås

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial D} Q\,\mathrm{d}y.$$

Adderar vi de två integraler ovan så fås

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y. \qquad \square$$

9 Kurvintegralen av ett konservativt fält ett är en potentialdifferens

Sats: 9 *Låt* $\mathbf{F} = (P,Q)$ *vara ett potentialfält med potentialen* U *i det öppna området* Ω*. För varje kurva* $\gamma \in \Omega$ *gäller då*

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\,\mathrm{d}\mathbf{r} = U(\mathbf{b}) - U(\mathbf{a}),$$

där $\mathbf{a}$ *och* $\mathbf{b}$ *är begynnelse- respektive slutpunkt för* γ*.*

Bevis:

Låt $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ vara en parameterframställning av γ. Speciellt är

$$\mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{a}, \qquad \mathbf{r}(\beta) = \mathbf{b}.$$

Enligt kedjeregeln är

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(\mathbf{r}(t)) = \nabla U(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t).$$

Vi får då

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_\alpha^\beta \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(\mathbf{r}(t))\,\mathrm{d}t = U(\mathbf{r}(\beta)) - U(\mathbf{r}(\alpha)) =$$

$$= U(\mathbf{b}) - U(\mathbf{a}) \qquad \square$$

10 Existens av en potential under angivna förutsättningar

Sats: 10 *Låt* $\mathbf{F} = (P,Q)$ *vara ett kontinuerligt vektorfält definierat i en bågvis sammanhängade öppen mängd* Ω*. Om kurvintegralen* $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$ *är oberoende av vägen så har* $\mathbf{F}$ *en potential i* Ω*.*

Bevis:

Vi konstruerar en potential till fältet $\mathbf{F}$. Låt $(a,b) \in \Omega$ vara en fix och $(x,y) \in \Omega$ en godtycklig punkt, låt även $\gamma \in \mathbf{C}^1(\Omega)$ vara en godtycklig kurva som börjar i (a,b) och slutar i (x,y). Vi definierar då U så att

$$U(x,y) = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot \,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_\gamma P(s,t)\,\mathrm{d}s + Q(s,t)\,\mathrm{d}t.$$

Enligt förutsättningarna är kurvintegralen oberoende av vägen, därför skriver vi

$$U(x,y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} P(s,t)\,\mathrm{d}s + Q(s,t)\,\mathrm{d}t.$$

Vi vill visa att nedanstående likheter stämmer

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \; \frac{\partial U}{\partial y} = Q.$$

Vi verifierar det första villkoret genom att bilda differenskvoten

$$\frac{U(x+h,y) - U(x,y)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_{(a,b)}^{(x+h,y)} P\,\mathrm{d}s + Q\,\mathrm{d}t - \int_{(a,b)}^{(x,y)} P\,\mathrm{d}s + Q\,\mathrm{d}t \right) =$$

$$= \frac{1}{h} \int_{(x,y)}^{(x+h,y)} P\,\mathrm{d}s + Q\,\mathrm{d}t,$$

i den sista integralen väljer vi att integrera längs den räta linjen mellan (x,y) till $(x+h,y)$ i $st-$planet. Där är $\mathrm{d}t = 0$. Därefter har vi

$$\frac{U(x+h,y) - U(x,y)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} P(s,y)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{h} P(x+\theta h,y)h = P(x+\theta h,y),$$

där $0 \leq \theta \leq 1$, detta gäller enligt integralkalkylens medelvärdessats. Eftersom P är kontinuerlig ger gränsövergången $h \to 0$ gränsvärdet $P(x,y)$. Alltså är funktionen U partiellt deriverbar med avseende på x och

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P.$$

Analogt följer $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$. Alltså är $U(x,y)$ en potential till $\mathbf{F}$, $\square$.

11 Varje potentialfält är virvelfritt - inklusive exempel 16

Sats: 11 *Varje potentialfält är virveletfritt.*

11.1 Exempel 16

Ett typiskt resultat i vektoranalysen är

$$\mathrm{rot}(\nabla f) = \mathbf{0},$$

som innebär att varje potentialfält är virveltfritt. Vi visar att detta stämmer.

Det gäller att $\mathrm{rot}(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f)$. Enligt vanlig kryssproduktr äkning får vi att

$$\nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f'_x & f'_y & f'_z \end{vmatrix},$$

den sista raden har sitt utseende ty $\nabla f = \mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$. Därav följer det att

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f'_x & f'_y & f'_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f'_z}{\partial y} - \frac{\partial f'_y}{\partial z}, \frac{\partial f'_x}{\partial z} - \frac{\partial f'_z}{\partial x}, \frac{\partial f'_y}{\partial x} - \frac{\partial f'_x}{\partial y}\right) =$$

$$= \left(f''_{zy} - f''_{yz}, f''_{xz} - f''_{zx}, f''_{yx} - f''_{xy}\right).$$

Per definition gäller det att för ett vektorfält $\mathbf{F}$, om

$$\exists\, U \in \mathbf{C}^2(\Omega) : \mathbf{F} = \nabla U.$$

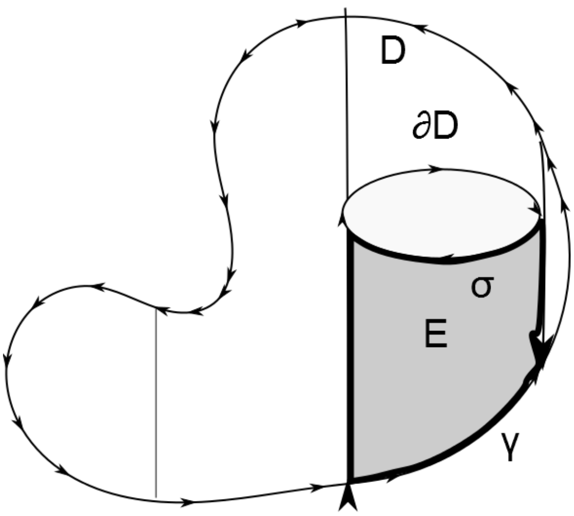
så kallas U för en potential till $\mathbf{F}$. Men eftersom $\nabla U = (P,Q) \in \mathbf{C}^1$, så gäller det att

$$f''_{zy} = f''_{yz}, f''_{xz} = f''_{zx}, f''_{yx} = f''_{xy}.$$

Alltså har vi att

$$= \left(f''_{zy} - f''_{yz}, f''_{xz} - f''_{zx}, f''_{yx} - f''_{xy}\right) = (0,0,0) = \mathbf{0}.$$

Alltså har vi visat att varje potentialfält är virvelfritt. $\square$



Figur 1: Y är det som är skrivet som γ i beviset. Figuren är till beviset för Greens formel. Finns en liknande bild i boken på sidan 336.