Övningsskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035), 2007-02-17
kl. 8.30-10.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Bernhard Behrens, tel. 0768–681630
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

==

1. Låt $f(x,y) = x + y + \sqrt{3 - x^2 - y^2}$.

a) Ange en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(-1,-1,-1)$. (4p)

b) Bestäm alla stationära punkter till f och deras karaktär. (6p)

2. Låt $u = y + \cosh x$, $v = y - \sinh x$.

a) Visa att tillordningen $(x,y) \mapsto (u,v)$ är lokalt bijektiv i varje punkt i $\mathbb{R}^2$. (2p)

b) Lös problemet $f'_x + \cosh x\, f'_y = e^x$, $f(x, 2\sinh x) = \cosh x$. [använd $u, v\ldots$] (5p)

c) Beräkna arean av det område i planet som begränsas av kurvorna
$y = 6 - \cosh x$, $y = 3 - \cosh x$, $y = \sinh x - 1$ och $y = \sinh x + 1$. [använd $u, v\ldots$] (6p)

3. Låt $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}, & \text{då } x \neq 0 \\ 0 & \text{, då } x = 0 \end{cases}$.

Visa att riktningsderivatan $f'_{\boldsymbol{v}}(0,0)$ existerar för varje $\boldsymbol{v} = (\alpha, \beta)$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. (4p)
Gäller $f'_{\boldsymbol{v}}(0,0) = \operatorname{grad} f(0,0) \bullet \boldsymbol{v}$? (2p)
Är f differentierbar i $(0,0)$? (1p) (7p)

7p – 13p: 1 bonuspoäng; 14p – 20p: 2 bonuspoäng; 21p – 27p: 3 bonuspoäng; 28p – 30p: 4 bonuspoäng

BB

Övningstenta i flervariabelanalys F1 (mve035), 07-02-17

uppg. 1

$f(x,y) = x+y+\sqrt{3-x^2-y^2} \Rightarrow \text{grad} f(x,y) = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{3-x^2-y^2}}, 1 - \frac{y}{\sqrt{3-x^2-y^2}}\right)$
$\Rightarrow \underline{\text{grad} f(-1,-1) = (2,2)}$.

a) Tangentplanet har ekvationen
$z = f(-1,-1) + f'_x(-1,-1)(x+1) + f'_y(-1,-1)(y+1) =$
$= -1 + 2x + 2 + 2y + 2$ dvs. $\underline{2x + 2y - z + 3 = 0}$.

b) Observera att D_f är cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 3$, f är C^1 i inre punkter i D_f.

$\begin{cases} f'_x = 1 - \frac{x}{\sqrt{3-x^2-y^2}} = 0 \\ f'_y = 1 - \frac{y}{\sqrt{3-x^2-y^2}} = 0 \end{cases} \iff x = y = \sqrt{3-x^2-y^2}$, det ger $x \geq 0$ och
$x^2 = 3 - 2x^2$, enda stationära punkten är alltså $(1,1)$. Karaktären:

$$\left.\begin{array}{l} f''_{xx} = -\dfrac{\sqrt{3-x^2-y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{3-x^2-y^2}}}{3-x^2-y^2} = \dfrac{y^2-3}{(3-x^2-y^2)\sqrt{3-x^2-y^2}} \\ f''_{yy} = -\dfrac{\sqrt{3-x^2-y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{3-x^2-y^2}}}{3-x^2-y^2} = \dfrac{x^2-3}{(3-x^2-y^2)\sqrt{3-x^2-y^2}} \\ f''_{xy} = \dfrac{-xy}{(3-x^2-y^2)\sqrt{3-x^2-y^2}} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\begin{cases} f''_{xx}(1,1) = -2 \\ f''_{yy}(1,1) = -2 \\ f''_{xy}(1,1) = -1 \end{cases}$, den kvadratiska formen

$Q(h,k) = f''_{xx}(1,1)\,h^2 + 2f''_{xy}(1,1)\,hk + f''_{xy}(1,1)\,k^2 =$
$= -2\left(h^2 + hk + k^2\right) = -2\left(\left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k^2\right)$ är negativt definit,
punkten $(1,1)$ är alltså en sträng lokal maximipunkt.
ANM: Man kan också beräkna största/minsta värde som f antar på den kompakta mängden D_f (det tillkommer undersökningnen av randen $x^2 + y^2 = 3$): man får att f antar i $(1,1)$ sitt största värde $(f(1,1) = 3)$.

svar: a) $2x + 2y - z = -3$ **b)** $(1,1)$ sträng lokal maximipunkt

uppg. 2

a) $\begin{cases} u = y + \cosh x \\ v = y - \sinh x \end{cases}$, $\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sinh x & 1 \\ -\cosh x & 1 \end{vmatrix} =$
$= \sinh x + \cosh x = e^x > 0$ för alla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Eftersom u, v är C^1 i $\mathbb{R}^2$ så ger inversa funktionssatsen att tillordningen $(x,y) \mapsto (u,v)$ är lokalt bijektiv i varje punkt i $\mathbb{R}^2$.

b) Kedjeregeln ger

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = \sinh x f'_u - \cosh x f'_v \\ f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = f'_u + f'_v \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$f'_x + \cosh x f'_y = (\sinh x + \cosh x)\, f'_u = e^x f'_u \overset{!}{=} e^x \Rightarrow f'_u = 1 \Rightarrow$
$f(u,v) = u + g(u,v) \Rightarrow f(x,y) = y + \cosh x + g(y - \sinh x) \Rightarrow$
$f(x, 2\sinh x) = 2\sinh x + \cosh x + g(\sinh x) \overset{!}{=} \cosh x \Rightarrow$
$g(t) = -2t \Rightarrow f(x,y) = y + \cosh x - 2(y - \sinh x) = \underline{2\sinh x + \cosh x - y}$.

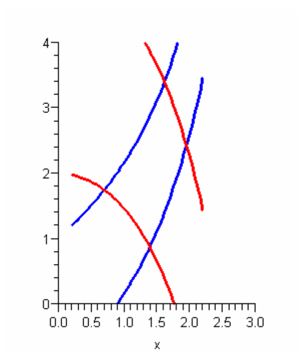
c) Området D beskrives av $3 \le y + \cosh x \le 6$, $-1 \le y - \sinh x \le 1$, i variablerna u och v är det $D' : 3 \le u \le 6$, $-1 \le v \le 1$, arean är alltså

$$\iint_D dxdy = \iint_{D'} \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = \left[\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{\frac{d(u,v)}{d(x,y)}} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{u-v} > 0\right] =$$

$$= \int_3^6 \int_{-1}^1 \frac{1}{u-v} dvdu = \int_3^6 \left[-\ln(u-v)\right]_{v=-1}^{v=1} du = \int_3^6 \left(\ln(u+1) - \ln(u-1)\right) du =$$

[p.i]$= \left[(u+1)\ln(u+1) - (u-1)\ln(u-1)\right]_3^6 = 7\ln 7 - 5\ln 5 - 4\ln 4 + 2\ln 2.$

svar: b) $f(x,y) = 2\sinh x + \cosh x - y$ **c)** $7\ln 7 - 5\ln 5 - 6\ln 2$



uppg. 3

$f(0,y) = 0$ och $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ för $x \neq 0$;
för $\boldsymbol{v} = (\alpha, \beta)$ med $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ gäller:
om $\alpha \neq 0$: $f'_{\boldsymbol{v}}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t\alpha, t\beta) - f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t^3\alpha\beta^2}{t(t^2\alpha^2 + t^4\beta^4)} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2 + t^2\beta^4} = \frac{\beta^2}{\alpha}$,
om $\alpha = 0$: $f'_{\boldsymbol{v}}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(0,t\beta) - f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$ ($\beta = \pm 1$ då), alltså existerar riktningsderivatan i origo i varje riktning. Vi ser även att $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$ ($\boldsymbol{v} = (1,0)$ resp. $\boldsymbol{v} = (0,1)$), det ger $\operatorname{grad} f(0,0) \bullet \boldsymbol{v} = 0$, men $f'_{\boldsymbol{v}}(0,0) \neq \operatorname{grad} f(0,0) \bullet \boldsymbol{v}$ för t.ex. $\boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ och det ger att f inte är differentierbar i origo; detta följer även av att f inte är kontinuerlig i origo: t.ex. $f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} \neq f(0,0)$ då $y \to 0$.

svar: $f'_{\boldsymbol{v}}(0,0) = \operatorname{grad} f(0,0) \bullet \boldsymbol{v}$ gäller inte; f är inte differentierbar i $(0,0)$