Matematik CTH&GU

Övningsskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035), 2008-02-16
kl. 8.30-10.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Bernhard Behrens, tel. 0768–681630
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

==

1. Låt $f(x,y) = 4\cos(x) - 3xy + \left(\sin\left(x+y^2\right)\right)^3 - 4\sin(y^2)$.

a) Ange en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(\frac{\pi}{2}, 0, 1)$. (4p)

b) Visa att origo är en stationär punkt till f och bestäm dess karaktär.
[ledning: Mclaurinutveckla!] (6p)

2. Låt $u = x^2 + y^2$, $v = xy$ och $\Omega = \{(x,y) : -x < y < x\}$.

a) Visa att tillordningen $(x,y) \mapsto (u,v)$ är lokalt bijektiv i varje punkt i Ω. (2p)

b) Lös problemet $xf'_x - y f'_y + \left(x^2 - y^2\right) f = 0$, $(x,y) \in \Omega$. [använd $u, v \ldots$] (4p)

3. Beräkna volymen $m(K)$ av pyramiden $K = \{(x,y,z) : 0 \le z \le 2 - |x+y| - |x-y|\}$
utan att använda fomeln "$m(K) = \frac{1}{3}\text{basyta} \cdot \text{höjd}$"
(du skall alltså verifiera att formeln stämmer för K). (5p)

4. Låt $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & \text{då } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, då } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Visa att f är C^1 men inte C^2 i origo (ledning: beräkna $f''_{xy}(0,0)$ och $f''_{yx}(0,0)$). (9p)

7p – 13p: 1 bonuspoäng; 14p – 20p: 2 bonuspoäng; 21p – 27p: 3 bonuspoäng; 28p – 30p: 4 bonuspoäng BB

Övningstenta i flervariabelanalys F1 (mve035), 08-02-16

uppg. 1

$f(x,y) = 4\cos x - 3xy + \left(\sin\left(x+y^2\right)\right)^3 - 4\sin\left(y^2\right)$.

a) $f'_x(x,y) = -4\sin x - 3y + 3\left(\sin\left(x+y^2\right)\right)^2\cos\left(x+y^2\right)$,
$f'_y(x,y) = -3x + 3\left(\sin\left(x+y^2\right)\right)^2\cos\left(x+y^2\right)2y - 8y\cos\left(y^2\right)$.
Tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ punkten $\left(\frac{\pi}{2}, 0, f\left(\frac{\pi}{2},0\right)\right)$ har ekvationen
$z = f\left(\frac{\pi}{2},0\right) + f'_x\left(\frac{\pi}{2},0\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + f'_y\left(\frac{\pi}{2},0\right)(y-0) =$
$= 1 - 4\left(x-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{3\pi}{2}y$ eller $\underline{8x + 3\pi y + 2z = 2 + 4\pi}$.

b) Vi Mclaurinutvecklar t.o.m. ordningen 2:
$4\cos x - 3xy - 4\sin\left(y^2\right) + \left(\sin\left(x+y^2\right)\right)^3 =$
$= 4\left(1 - \frac{x^2}{2} + x^3B_1(x)\right) - 3xy - 4\left(y^2 + y^3B_2(y)\right) + \left(x+y^2\right)^3B_3(x,y) =$
$= 4 - 2x^2 - 3xy - 4y^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3B_4(x,y)$
[$B_{\dots}$ är funktioner som är begränsade nära origo], Mclaurinpolynomets entydighet ger $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, dvs. origo är en stationär punkt,
och $\begin{cases} f''_{xx}(0,0) = -4 \\ f''_{xy}(0,0) = -3 \\ f''_{yy}(1,1) = -8 \end{cases}$, den kvadratiska formen
$Q(h,k) = f''_{xx}(0,0)h^2 + 2f''_{xy}(0,0)hk + f''_{xy}(0,0)k^2 =$
$= -4\left(h^2 + \frac{3}{2}hk + 2k^2\right) = -2\left(\left(h + \frac{3k}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}k^2\right)$ är negativt definit,
punkten $(0,0)$ är alltså en sträng lokal maximipunkt.

svar: a) $8x + 3\pi y + 2z = 2 + 4\pi$ **b)** origo är en sträng lokal maximipunkt

uppg. 2

a) $\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy \end{cases}$, $\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2\left(x^2 - y^2\right) > 0$
för alla $(x,y) \in \Omega = \{(x,y) : |y| < x\}$. Eftersom u, v är C^1 i Ω så ger inversa funktionssatsen att tillordningen $(x,y) \mapsto (u,v)$ är lokalt bijektiv i varje punkt i Ω.

b) Kedjeregeln ger
$$\left.\begin{matrix} f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = 2xf'_u + yf'_v \\ f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = 2yf'_u + xf'_v \end{matrix}\right\} \Rightarrow xf'_x - yf'_y + \left(x^2 - y^2\right)f =$$
$= 2\left(x^2 - y^2\right)f'_u + \left(x^2 - y^2\right)f = 0 \underset{x^2 \neq y^2}{\Rightarrow} f'_u = -\frac{1}{2}f \Rightarrow f(u,v) = g(v)e^{-\frac{u}{2}}$.

svar: $f(x,y) = g(xy)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$.

uppg. 3

Området $D : |x+y|+|x-y| \leq 2$ är kvadraten $|x| \leq 1, |y| \leq 1$

[bestäm randen ∂D : $|x+y|+|x-y|=2$ genom att räkna ut beloppen:
för $-x<y<x$ är $|x+y|+|x-y| = x+y+x-y = 2x = 2$, dvs. $x=1$,
för $-y<x<y$ är $|x+y|+|y-x| = x+y+y-x = 2y = 2$, dvs. $y=1$,
för $x<y<-x$ är $|x+y|+|y-x| = -x-y+y-x = -2x = 2$, dvs. $x=-1$,
för $y<x<-y$ är $|x+y|+|x-y| = -x-y+x-y = -2y = 2$, dvs. $y=-1$].

Volymen av $K = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, 0 \leq z \leq 2-|x+y|-|x-y|\}$ är

$$m(K) = \iint_D (2-|x+y|-|x-y|)\,dxdy \underset{\text{symmetri}}{=} 4\iint_{D_1} (2-|x+y|-|x-y|)\,dxdy$$

där $D_1 = \{(x,y) : -x \leq y \leq x \leq 1\}$ ($x \geq 0$ där), alltså

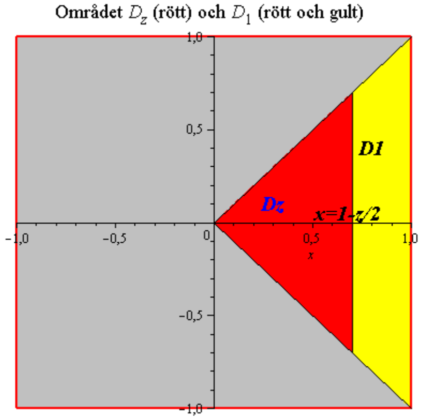
$$\underline{m(K)} = 4\iint_{D_1} (2-(x+y)-(x-y))\,dxdy = 4\int_0^1 \left(\int_{-x}^{x} (2-2x)\,dy\right) dx =$$

$$= 4\int_0^1 (2-2x)\left(2\,[y]_{y=0}^{y=x}\right) dx = 8\int_0^1 \left(2x-2x^2\right) dx = 8\left[x^2-\tfrac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \underline{\tfrac{8}{3}} = \textbf{svar}.$$

Alternativt fås $m(K) = \iiint_K dxdydz = 4\int_0^2 \underbrace{\left(\iint_{D_z} dxdy\right)}_{=m(D_z)=\left(1-\frac{z}{2}\right)^2} dz = 4\int_0^2 \left(1-\frac{z}{2}\right)^2 dz =$

$$= \frac{-8}{3}\left[\left(1-\frac{z}{2}\right)^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

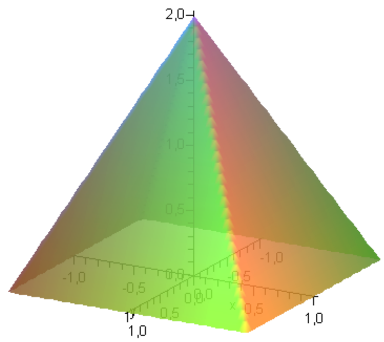
Området D_z (rött) och D_1 (rött och gult)



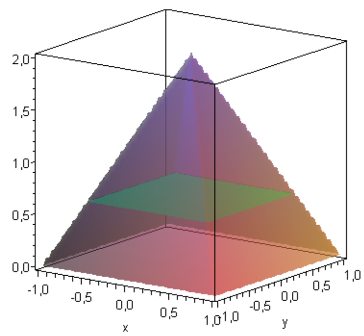
ANM.: Du kunde även substituerat $u=x+y$, $v=x-y$, området D blir då $D' : |u|+|v| \leq 2$ och $\underline{m(K)} = \iint_{D'} (2-|u|-|v|)\left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv =$ [symmetri]

$$= 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^2\left(\int_0^{2-u}(2-u-v)\,dv\right)du = 2\int_0^2\left(\left[(2-u)\,v-\frac{1}{2}v^2\right]_{v=0}^{v=2-u}\right)du =$$

$$= 2\int_0^2 \frac{1}{2}(2-u)^2\,du = \frac{1}{3}\left[(2-u)^3\right]_0^2 = \underline{\frac{8}{3}}. \quad \left[\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{\frac{d(u,v)}{d(x,y)}} = \frac{1}{2}\right]$$



Pyramiden K



uppg. 4

$f(0,0) = 0$ och $f(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}$ för $(x,y) \neq (0,0)$;

steg 1: vi visar att f är partiellt deriverbar i $(0,0)$:

$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \frac{0-0}{x} = 0 \to 0$ då $x \to 0$, $\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \frac{0-0}{y} \to 0$ då $y \to 0$,
det visar att $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$.

steg 2: vi visar att f är C^1 i origo: för $(x,y) \neq (0,0)$ är

$f'_x(x,y) = y\frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)-(x^3-xy^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}$,

$f'_y(x,y) = x\frac{(x^2-3y^2)(x^2+y^2)-(x^2y-y^3)2y}{(x^2+y^2)^2} = x\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}$, alltså

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y) = 0 = f'_x(0,0)$ och $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f'_y(x,y) = 0 = f'_y(0,0)$

ty $\frac{x^4 \pm 4x^2y^2 - y^4}{(x^2+y^2)^2}$ är begränsad ($= \cos^4\varphi \pm 4\cos^2\varphi\sin^2\varphi - \sin^4\varphi$ med polära koordinater), det visar att $f'_x(x,y)$ och $f'_y(x,y)$ är kontinuerliga i origo.

steg 3: vi visar att $(f'_x)'_y(0,0)$ och $\left(f'_y\right)'_x(0,0)$ existerar (och är olika):

$$\frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} = \frac{-y-0}{y} = -1 \to -1 \text{ då } y \to 0,$$

$$\frac{f'_y(x,0) - f'_y(0,0)}{x} = \frac{x-0}{x} = 1 \to 1 \text{ då } x \to 0, \text{ det visar att}$$

$(f'_x)'_y(0,0) = -1 \neq 1 = \left(f'_y\right)'_x(0,0)$.

steg 4: därmed är visat att f inte är C^2 i origo (ty $C^2 \implies f''_{xy} = f''_{yx}$). vsv

Anm: För $(x,y) \neq (0,0)$ är förstås $f''_{yx}(x,y) = f''_{xy}(x,y) \left[= \frac{x^6+9x^2y^2(x^2-y^2)-y^6}{(x^2+y^2)^3}\right]$ (varför?); man kan naturligtvis även visa att f inte är C^2 i origo genom att visa att "$f''_{yx}(x,y)$ saknar gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$", men vi slapp deriveringen. F.ö. existerar även $f''_{xx}(0,0) = f''_{yy}(0,0) = 0$.