Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del B** den 29/8 2001, kl. 8.45–12.45.

Hjälpmedel: Beta, Standard Math. Tables. Typgodkänd räknedosa.
Telefon: Richards Grzibovski, tel 0740-45 90 22.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Taylorutveckla funktionen

$$f(x,y) = \sin(x-y)\sqrt{1+x+2y} - \cos(x+y)\ln(1+x-y)$$

kring origo med termer t.o.m. andra graden. Visa att har f en stationär punkt i origo och avgör dess karaktär. (7p)

2. Beräkna arean av ytan (en torus)

$$\begin{cases} x = (a+b\cos\varphi)\cos\theta, \\ y = (a+b\cos\varphi)\sin\theta, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ z = b\sin\varphi, \end{cases}$$

där a och b är konstanter, $0 < b < a$. (8p)

3. Bestäm maximum av $x - 2y + 5z$, då $x^2 + 2y^2 + xz + yz + z^2 = 1$. (7p)

4. Beräkna $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, då

$$\mathbf{F} = (xy^2z^4 + xy, x^2yz^4, 2x^2y^2z^3 - yz),$$

och C är skärningen mellan ytorna $x^2 + y^2 + z = 1$ och $2x + y + z = 1$. Kurvans projektion på xy-planet är positivt orienterad. (8p)

5. Beräkna $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$, då Y är begränsningsytan till tetraedern med hörn i $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(1,2,0)$ och $(1,1,3)$ (normalriktning utåt) och $\mathbf{F} = (y^2, yz, x^2)$. (8p)

6. Lös differentialekvationen

$$3x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (x > 0,\ y > 0)$$

genom att göra variabelbytet $s = xy$, $t = x^2y^3$. (7p)

7. Hur definieras riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})$? Visa hur $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})$ kan uttryckas med hjälp av gradienten. (7p)

8. Låt Δ vara en axelparallell rektangel. Redogör för vad som menas med att en begränsad funktion $f(x,y)$ är (Riemann-)integrerbar över Δ. Hur definieras $\iint_\Delta f(x,y)\,dxdy$? (8p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 29/8 2001

1. Med hjälp, av envariabelutvecklingarna $\sin t = t + O(t^3)$, $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + O(t^3)$, $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4)$, $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$, då $t \to 0$, fås

$$f(x,y) = \Big(x - y + O(r^3)\Big)\Big(1 + \frac{1}{2}(x+2y) - \frac{1}{8}(x+2y)^2 + O(r^3)\Big)$$
$$- \Big(1 - \frac{1}{2}(x+y)^2 + O(r^4)\Big)\Big(x - y - \frac{1}{2}(x-y)^2 + O(r^3)\Big) = x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}y^2 + O(r^3),$$

då $r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$. Detta är den sökta Taylorutvecklingen. Det framgår att $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, så att origo är en stationär punkt. Eftersom den kvadratiska formen $x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}y^2$ kan skrivas $(x - \frac{1}{4}y)^2 - \frac{9}{16}y^2$, är den indefinit, och origo är en sadelpunkt.

---

2. Vi har $\mathbf{r} = ((a + b\cos\varphi)\cos\theta, (a + b\cos\varphi)\sin\theta, b\sin\varphi)$, och

$$\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\varphi = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -(a+b\cos\varphi)\sin\theta & (a+b\cos\varphi)\cos\theta & 0 \\ -b\sin\varphi\cos\theta & -b\sin\varphi\sin\theta & b\cos\varphi \end{vmatrix}$$
$$= b(a+b\cos\varphi)(\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi),$$

så att $\left|\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\varphi\right| = b(a+b\cos\varphi)\sqrt{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = b(a+b\cos\varphi)$. Arean är

$$\iint_Y dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\varphi\right| d\theta d\varphi = b\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(a+b\cos\varphi)\,d\theta d\varphi = 2\pi b\int_0^{2\pi}(a+b\cos\varphi)\,d\varphi = \boxed{4\pi^2 ab}.$$

---

3. Sök maximum av $f(x,y,z) = x - 2y + 5z$ under bivillkoret $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + xz + yz + z^2 - 1 = 0$. Eftersom $g(x,y,z) = (x + \frac{1}{2}z)^2 + 2(y + \frac{1}{4}z)^2 + \frac{5}{8}z^2 - 1$, är mängden $\{(x,y,z) : g(x,y,z) = 0\}$ kompakt. Alltså antas maximum. Enligt Lagranges multiplikatorregel finns ett tal λ så att $\nabla f(x,y,z) = \lambda\nabla g(x,y,z)$ där maximum antas (såvida inte $\nabla g(x,y,z) = \mathbf{0}$, vilket vi kan utesluta eftersom det skulle ge $2x + z = 4y + z = x + y + 2z = 0$, $x = y = z = 0$, vilket är oförenligt med $g(x,y,z) = 0$). Vi får då

$$\begin{cases} 1 = \lambda(2x + z), \\ -2 = \lambda(4y + z), \\ 5 = \lambda(x + y + 2z), \end{cases}$$

så att $\frac{1}{\lambda} = 2x + z = -\frac{1}{2}(4y+z) = \frac{1}{5}(x+y+2z)$, vilket ger $y = x$, $z = -\frac{8x}{3}$. Tillsammans med villkoret $g(x,y,z) = 0$ fås $(1+2-\frac{8}{3}-\frac{8}{3}+\frac{64}{9})x^2 = \frac{43}{9}x^2 = 1$, $x = \pm\frac{3}{\sqrt{43}}$. Vi får punkterna $(x,y,z) = \pm\frac{1}{\sqrt{43}}(3,3,-8)$ med $f(x,y,z) = \pm\frac{1}{\sqrt{43}}(3 - 6 - 40) = \mp\frac{43}{\sqrt{43}} = \mp\sqrt{43}$. Alltså är max.värdet $\boxed{\sqrt{43}}$.

---

4. Projektionen C_1 på xy-planet av kurvan C fås av $(z =)\, 1-x^2-y^2 = 1-2x-y$, dvs. $(x-1)^2+(y-\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$. Låt D vara området innanför C_1. På C är $dz = -2dx - dy$, så att

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C (xy^2z^4 + xy)\,dx + x^2yz^4\,dy + (2x^2y^2z^3 - yz)\,dz = \int_C d(\frac{1}{2}x^2y^2z^4) + xy\,dx - yz\,dz$$
$$= \int_C xy\,dx - y(1-2x-y)(-2dx - dy) = \int_{C_1}(2y - 3xy - 2y^2)\,dx + (y - 2xy - y^2)\,dy$$
$$= [\text{Greens formel}] = \iint_D(-2y - 2 + 3x + 4y)\,dxdy = \iint_D(3x + 2y)\,dxdy - 2\mu(D)$$
$$= [\text{polära koord.}, x = 1 + r\cos\theta,\ y = \frac{1}{2} + r\sin\theta,\ 0 \le r \le \frac{\sqrt{5}}{2},\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ dxdy = r\,drd\theta]$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{5}/2}(3 + 3r\cos\theta + 1 + 2r\sin\theta)r\,drd\theta - 2\pi\Big(\frac{\sqrt{5}}{2}\Big)^2$$
$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{5}/2} 4r\,dr - \frac{5\pi}{2} = 4\pi\left[r^2\right]_0^{\sqrt{5}/2} - \frac{5\pi}{2} = 5\pi - \frac{5\pi}{2} = \boxed{\frac{5\pi}{2}}.$$

---

5. Om T är tetraedern, så är enligt Gauss' sats

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_T \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = \iiint_T z\,dxdydz\,.$$

T har hörn i $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(1,2,0)$ och $(1,1,3)$. De tre sidor som går genom origo har ekvationerna $6x-3y-z=0$, $3y-z=0$ och $z=0$. Gör med ledning av detta variabelbytet $u=6x-3y-z$, $v=3y-z$, $w=z$. Då övergår T i en tetraeder T' med hörn i $(0,0,0)$, $(12,0,0)$, $(0,6,0)$ och $(0,0,3)$, alltså begränsad av koordinatplanen och planet $u+2v+4w=12$. Funktionaldeterminanten är

$$\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 18,$$

varför

$$\begin{aligned}
&\iiint_T z\,dxdydz = \iiint_{T'} w\,\frac{1}{18}\,dudvdw = \frac{1}{18}\int_0^{12} du \int_0^{(12-u)/2} dv \int_0^{(12-u-2v)/4} w\,dw \\
&= \frac{1}{18}\int_0^{12} du \int_0^{(12-u)/2} dv \left[\frac{1}{2}w^2\right]_0^{(12-u-2v)/4} = \frac{1}{2^2 3^2}\int_0^{12} du \int_0^{(12-u)/2} \frac{1}{2^4}(12-u-2v)^2\,dv \\
&= \frac{1}{2^6 3^2}\int_0^{12} \left[-\frac{1}{6}(12-u-2v)^3\right]_0^{(12-u)/2} du = \frac{1}{2^7 3^3}\int_0^{12} (12-u)^3\,du \\
&= \frac{1}{2^7 3^3}\left[-\frac{1}{4}(12-u)^4\right]_0^{12} = \frac{1}{2^9 3^3}\cdot 12^4 = \frac{2^8 3^4}{2^9 3^3} = \boxed{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

---

6. Med $s=xy$, $t=x^2y^3$ har vi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = yu'_s + 2xy^3u'_t, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = xu'_s + 3x^2y^2u'_t,$$

och vidare

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(yu'_s + 2xy^3u'_t\right) = y\frac{\partial}{\partial x}u'_s + 2xy^3\frac{\partial}{\partial x}u'_t + 2y^3u'_t \\
&= y\left(yu''_{ss} + 2xy^3u''_{st}\right) + 2xy^3\left(yu''_{ts} + 2xy^3u''_{tt}\right) + 2y^3u'_t \\
&= y^2u''_{ss} + 4xy^4u''_{st} + 4x^2y^6u''_{tt} + 2y^3u'_t, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(xu'_s + 3x^2y^2u'_t\right) = x\frac{\partial}{\partial x}u'_s + u'_s + 3x^2y^2\frac{\partial}{\partial x}u'_t + 6xy^2u'_t \\
&= x\left(yu''_{ss} + 2xy^3u''_{st}\right) + 3x^2y^2\left(yu''_{ts} + 2xy^3u''_{tt}\right) + u'_s + 6xy^2u'_t \\
&= xyu''_{ss} + 5x^2y^3u''_{st} + 6x^3y^5u''_{tt} + u'_s + 6xy^2u'_t, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(xu'_s + 3x^2y^2u'_t\right) = x\frac{\partial}{\partial y}u'_s + 3x^2y^2\frac{\partial}{\partial y}u'_t + 6x^2yu'_t \\
&= x\left(xu''_{ss} + 3x^2y^2u''_{st}\right) + 3x^2y^2\left(xu''_{ts} + 3x^2y^2u''_{tt}\right) + 6x^2yu'_t \\
&= x^2u''_{ss} + 6x^3y^2u''_{st} + 9x^4y^4u''_{tt} + 6x^2yu'_t.
\end{aligned}$$

Insatt i differentialekvationen fås

$$\begin{aligned}
&3x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} \\
&= 3x^2\left(y^2u''_{ss} + 4xy^4u''_{st} + 4x^2y^6u''_{tt} + 2y^3u'_t\right) - 5xy\left(xyu''_{ss} + 5x^2y^3u''_{st} + 6x^3y^5u''_{tt} + u'_s + 6xy^2u'_t\right) \\
&\quad + 2y^2\left(x^2u''_{ss} + 6x^3y^2u''_{st} + 9x^4y^4u''_{tt} + 6x^2yu'_t\right) + 3x\left(yu'_s + 2xy^3u'_t\right) + 2y\left(xu'_s + 3x^2y^2u'_t\right) \\
&= \left(3x^2y^2 - 5x^2y^2 + 2x^2y^2\right)u''_{ss} + \left(12x^3y^4 - 25x^3y^4 + 12x^3y^4\right)u''_{st} + \left(12x^4y^6 - 30x^4y^6 + 18x^4y^6\right)u''_{tt} \\
&\quad + \left(-5xy + 3xy + 2xy\right)u'_s + \left(6x^2y^3 - 30x^2y^3 + 12x^2y^3 + 6x^2y^3 + 6x^2y^3\right)u'_t \\
&= -x^3y^4u''_{st} = 0.
\end{aligned}$$

Alltså reduceras differentialekvationen till $u''_{st}=0$. Av $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial s})=0$ fås $\frac{\partial u}{\partial s}=F_1(s)$, $u=\int F_1(s)\,ds+G(t)=F(s)+G(t)$, där $F(s)$ och $G(t)$ är godtyckliga C^1-funktioner. Lösningen till den givna ekvationen är alltså $\boxed{u(x,y)=F(xy)+G(x^2y^3)}$.
