Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del B** den 11/3 2002, kl. 8.45–12.45.

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa. Observera dock ”Några Maclaurinutvecklingar” på baksidan.
Telefon: Johan Hoffman, tel 0740-45 90 22.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. a. Taylorutveckla funktionen

$$f(x,y) = \ln(1+x-2y) + 2\sqrt{\cos(2x+y)}$$

kring origo och tag med termer t.o.m. andra graden (plus restterm). (4p)

b. Det finns konstanter a och b så att

$$\frac{f(x,y) - 2 + ax + by}{x^2+y^2}$$

har ett gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$. Bestäm a och b och gränsvärdet. (3p)

2. a. Bestäm samtliga stationära punkter till funktionen $f(x,y) = (y^2-2x)e^{x-2y}$ och avgör deras karaktär. (4p)

b. Bestäm största och minsta värde av av $f(x,y)$ i mängden

$$\{(x,y) : 0 \le x \le \frac{y^2}{2},\ 0 \le y \le 3\}. \qquad (4p)$$

3. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D xy^2\,dxdy$, då D är det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna

$$y = x, \quad y = 3x, \quad y = \frac{1}{x^2}, \quad y = \frac{2}{x^2}. \qquad (8p)$$

4. Beräkna $\iint_{\partial K} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$, då K är kroppen

$$K = \{(x,y,z) : x^2 \le z \le 2 - x^2 - y^2\}$$

med utåtriktad normal, och

$$\mathbf{F} = (xy,\ xyz,\ z - yz)\,. \qquad (8p)$$

5. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, då

$$\mathbf{F} = \frac{(2x-3y,\ 3x+2y)}{x^2+y^2},$$

och γ är kurvan $x + 2y^2 = 1$ $(y \ge 0)$ från $(1,0)$ till $(-1,1)$. (7p)

6. Lös differentialekvationen

$$xe^{xy}u'_x - (1 + ye^{xy})u'_y = xu, \quad x > 0,$$

och bestäm en lösning som uppfyller $u(1,y) = y$. (7p)

7. Formulera och bevisa Greens formel. (8p)

8. Betrakta problemet att maximera eller minimera $f(x,y)$ under bivillkoret $g(x,y) = 0$, där f och g är C^1-funktioner. Antag att punkten (a,b) ger optimum. Visa att $\operatorname{grad} f(a,b)$ och $\operatorname{grad} g(a,b)$ är parallella (linjärt beroende). (7p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 11/3 2002

1. a. Med hjälp av envariabelutvecklingarna $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$, $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4)$, $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + O(t^2)$, då $t \to 0$, fås

$$\begin{aligned}
\ln(1+x-2y) &= x - 2y - \frac{1}{2}(x-2y)^2 + O(r^3) = x - 2y - \frac{1}{2}x^2 + 2xy - 2y^2 + O(r^3), \\
\cos(2x+y) &= 1 - \frac{1}{2}(2x+y)^2 + O(r^4) = 1 + v,\ v = -2x^2 - 2xy - \frac{1}{2}y^2 + O(r^4), \\
\sqrt{\cos(2x+y)} &= \sqrt{1+v} = 1 + \frac{1}{2}v + O(v^2) = 1 - x^2 - xy - \frac{1}{4}y^2 + O(r^4),
\end{aligned}$$

där $r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$. Alltså är

$$f(x,y) = \ln(1+x-2y) + 2\sqrt{\cos(2x+y)} = \boxed{2 + x - 2y - \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{2}y^2 + O(r^3)}.$$

b. $\frac{f(x,y)-2-x+2y}{x^2+y^2} = -\frac{5}{2} + O(r) \to \boxed{-\frac{5}{2}}$ då $(x,y) \to (0,0)$, dvs. $\boxed{a = -1,\ b = 2}$.

---

2. a. För $f(x,y) = (y^2 - 2x)e^{x-2y}$ är

$$\begin{aligned}
f'_x(x,y) &= (y^2 - 2x - 2)e^{x-2y}, \\
f'_y(x,y) &= (-2y^2 + 4x + 2y)e^{x-2y},
\end{aligned}$$

så de stationära punkterna satisfierar $y^2 - 2x = 2 = y$. Vi får den stationära punkten $(1,2)$.

$$\begin{aligned}
f''_{xx}(x,y) &= (y^2 - 2x - 2 - 2)e^{x-2y}, \\
f''_{xy}(x,y) &= (-2(y^2 - 2x - 2) + 2y)e^{x-2y}, \\
f''_{yy}(x,y) &= (-2(-2y^2 + 4x + 2y) - 4y + 2)e^{x-2y}.
\end{aligned}$$

I $(1,2)$ är $A = f''_{xx}(1,2) = -2e^{-3}$, $B = f''_{xy}(1,2) = 4e^{-3}$, $C = f''_{yy}(1,2) = -6e^{-3}$. Se på den kvadratiska formen $Q = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = (-2h^2 + 8hk - 6k^2)e^{-3} = -2[(h-2k)^2 - k^2]e^{-3}$. Då den är indefinit, så är den stationära punkten $\underline{(1,2)\text{ en sadelpunkt}}$.

b. I mängden $D = \{(x,y) : 0 \le x \le \frac{y^2}{2},\ 0 \le y \le 3\}$ är $f(x,y) \ge 0$, och <u>minimivärdet 0</u> antas längs kurvan $x = \frac{y^2}{2}$. Maximum antas också på randen, eftersom den enda stationära punkten är en sadelpunkt. Längs $x = 0$, $0 \le y \le 3$ är $f(0,y) = y^2e^{-2y}$, vars derivata $(2y - 2y^2)e^{-2y}$ är 0 för $y = 1$, så längs den delen av randen är maximivärdet e^{-2}. Längs $y = 3$, $0 \le x \le \frac{9}{2}$ är $f(x,3) = (9-2x)e^{x-6}$, vars derivata $(7-2x)e^{x-6}$ är 0 för $x = \frac{7}{2}$, och maximum längs den delen av randen är $2e^{-5/2}$. Nu är $2e^{-5/2} > e^{-2}$ (följer av att $e < 4$), så <u>maximivärdet</u> över D är $\underline{2e^{-5/2}}$.

---

3. Sätt $u = \frac{y}{x}$, $v = x^2y$. Då blir integrationsområdet i uv-planet $D' = \{(u,v) : 1 \le u \le 3,\ 1 \le v \le 2\}$. Vi har

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 2xy & x^2 \end{vmatrix} = -y - 2y = -3y, \quad dxdy = \frac{1}{\left|\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right|}dudv = \frac{1}{3y}dudv,$$

och vidare är $x = \frac{y}{u}$, $v = \frac{y^3}{u^2}$, så att $y = u^{2/3}v^{1/3}$, $x = u^{-1/3}v^{1/3}$. Alltså är

$$\begin{aligned}
\iint_D xy^2\,dxdy &= \frac{1}{3}\iint_{D'} xy\,dudv = \frac{1}{3}\iint_{D'} u^{1/3}v^{2/3}\,dudv = \frac{1}{3}\int_1^3 u^{1/3}\,du \cdot \int_1^2 v^{2/3}\,dv \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{3}{4}u^{4/3}\right]_1^3 \left[\frac{3}{5}v^{5/3}\right]_1^2 = \boxed{\frac{3}{20}(3^{4/3} - 1)(2^{5/3} - 1)}.
\end{aligned}$$

---

4. Kroppens projektion på xy-planet fås av $x^2 \leq 2 - x^2 - y^2$, dvs. $2x^2 + y^2 \leq 2$; en ellips D. Gauss' sats ger

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz = \iiint_K (y + xz + 1 - y)\, dxdydz \\ &= \iiint_K xz\, dxdydz + \iiint_K dxdydz. \end{aligned}$$

Den första integralen i sista ledet är 0, eftersom kroppen är symmetrisk m.a.p. yz-planet och integranden är udda i x. Alltså är

$$I = \iint_D (2 - x^2 - y^2 - x^2)\, dxdy = \iint_D (2 - 2x^2 - y^2)\, dxdy.$$

Med elliptiskt-polära koordinater $x = \frac{1}{\sqrt{2}} r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ dxdy = \frac{1}{\sqrt{2}} r\, drd\varphi$ blir

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2) \frac{1}{\sqrt{2}} r\, drd\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2r - r^3)\, dr = \sqrt{2}\pi \left[r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = \boxed{\pi\sqrt{2}}.$$

5.
$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma \frac{(2x - 3y)dx + (3x + 2y)dy}{x^2 + y^2} = \int_\gamma \frac{2x\, dx + 2y\, dy}{x^2 + y^2} + 3 \int_\gamma \frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2 + y^2}.$$

Med polära koordinater r och φ blir

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma d(\ln r^2) + 3 \int_\gamma d\varphi = \left[\ln r^2 + 3\varphi \right]_{(1,0)}^{(-1,1)} = \ln 2 + 3 \cdot \frac{3\pi}{4} - \ln 1 - 0 = \boxed{\ln 2 + \frac{9\pi}{4}}.$$

---

6. Karakteristikernas differentialekvation (i xy-planet) är

$$\frac{dx}{xe^{xy}} = -\frac{dy}{1 + ye^{xy}}, \qquad (1 + ye^{xy})dx + xe^{xy}dy = 0, \qquad d(x + e^{xy}) = 0.$$

Detta är alltså en exakt differentialekvation med lösning $x + e^{xy} = C$. Sätt $s = x + e^{xy}$, $t = x$. Då är

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = (1 + ye^{xy})\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t}, \\ u'_y &= \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = xe^{xy}\frac{\partial u}{\partial s}, \end{aligned}$$

och

$$xe^{xy}u'_x - (1 + ye^{xy})u'_y = xe^{xy}(1 + ye^{xy})\frac{\partial u}{\partial s} + xe^{xy}\frac{\partial u}{\partial t} - (1 + ye^{xy})xe^{xy}\frac{\partial u}{\partial s} = xe^{xy}\frac{\partial u}{\partial t} = xu,$$

dvs. (eftersom $e^{xy} = s - t$)

$$(s - t)\frac{\partial u}{\partial t} = u, \qquad \frac{\partial}{\partial t}((s - t)u) = 0, \qquad (s - t)u = g(s),$$

där g är en godtycklig (deriverbar) funktion av en variabel. Alltså är differentialekvationens allmänna lösning

$$u(x, y) = e^{-xy} g(x + e^{xy}).$$

Bestäm g så att $u(1, y) = e^{-y} g(1 + e^y) = y$. Med $s = 1 + e^y$ blir $y = \ln(s - 1)$, och $g(s) = ye^y = (s - 1)\ln(s - 1)$. Då blir differentialekvationens lösning $\boxed{u(x, y) = e^{-xy}(x + e^{xy} - 1)\ln(x + e^{xy} - 1)}$.
