Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del B** den 28/8 2002, kl. 8.45–12.45.
Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.
Telefon: Anton Evgrafov, tel 0740-45 90 22.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Bestäm alla stationära punkter till funktionen $f(x, y) = x^2y + y^3 - x^2 - 2y^2$ och ange deras karaktär. (8p)

2. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \left(\frac{x+y}{x}\right)^2 dxdy$, då D är fyrhörningen med hörn i $(2, 0)$, $(4, 0)$, $(2, 2)$ och $(1, 1)$. (7p)

3. Minimera $x^2 + y^2 + z^2$ då $4x^2 - 3xy + 6z = 9$, dvs. bestäm den eller de punkter på ytan $4x^2 - 3xy + 6z = 9$ som ligger närmast origo. (7p)

4. Beräkna $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$, då
$$\mathbf{F} = (xz^2 - yz, x^2 - z^2, z^3 + y^2),$$
och Y är ytan $z = 1 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$, med normalriktning uppåt. (8p)

5. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, då
$$\mathbf{F} = (2xye^{yz} + yz^2, x^2e^{yz} + x^2yze^{yz}, x^2y^2e^{yz} - yz),$$
och γ är skärningen mellan ytorna $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, och $x^2 + y^2 - 2x = 0$. Kurvans projektion på xy-planet är positivt orienterad. (7p)

6. Visa att variabelbytet $s = x^2 - y^2$, $t = 2xy$ lämnar differentialekvationen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ invariant, dvs. att den transformeras till $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$. (7p)

7. Härled Taylors formel för en funktion av två variabler med restterm av ordning 3. (8p)

8. Visa att om funktionen $f(x, y)$ är kontinuerlig på den kompakta rektangeln
$$\Delta = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$$
så är f integrerbar över denna. (8p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 28/8 2002

1. Sök stationära punkter för $f(x,y) = x^2y + y^3 - x^2 - 2y^2$:

$$f'_x = 2xy - 2x = 2x(y-1) = 0,$$
$$f'_y = x^2 + 3y^2 - 4y = 0.$$

Ur första ekvationen fås antingen $x = 0$ eller $y = 1$. Om $x = 0$ ger andra ekvationen $3y^2 - 4y = 0$, dvs. $y = 0$ eller $y = \frac{4}{3}$. Om $y = 1$ fås $x^2 = 4y - 3y^2 = 1$. De stationära punkterna är alltså $(0,0)$, $(0, \frac{4}{3})$ och $(\pm 1, 1)$. För $x = 0$, $y = 0$ har vi

$$A = f''_{xx} = 2y - 2 = -2, \quad B = f''_{xy} = 2x = 0, \quad C = f''_{yy} = 6y - 4 = -4.$$

Se på den kvadratiska formen

$$Q = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = -2h^2 - 4k^2.$$

Det är tydligt att Q är negativt definit. Alltså har f lokalt maximum i $(0,0)$. I $(0, \frac{4}{3})$ är $A = \frac{2}{3}$, $B = 0$, $C = 4$ och $Q = \frac{2}{3}h^2 + 4k^2$. Eftersom Q är positivt definit, har f lokalt minimum i $(0, \frac{4}{3})$. I $(\pm 1, 1)$ är $A = 0$, $B = \pm 2$, $C = 2$, och $Q = \pm 4hk + 2k^2 = 2k(k \pm 2h)$, som är indefinit. Alltså föreligger sadelpunkter i $(\pm 1, 1)$.

---

2. Området D begränsas av linjerna $y = 0$, $y = x$, $x + y = 2$ och $x + y = 4$. Sätt $u = x + y$, $v = \frac{y}{x}$. Då motsvaras D av $D' = \{(u,v) : 2 \le u \le 4,\ 0 \le v \le 1\}$. Vi har

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{x+y}{x^2}, \qquad dxdy = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = \frac{x^2}{x+y} dudv,$$

så att

$$\iint_D \left(\frac{x+y}{x}\right)^2 dxdy = \iint_{D'} (x+y)\, dudv = \iint_{D'} u\, dudv = \int_0^1 \left\{\int_2^4 u\, du\right\} dv = \left[\frac{u^2}{2}\right]_2^4 = \boxed{6}.$$

---

3. Vi söker minimum av $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, då $g(x,y,z) = 4x^2 - 3xy + 6z = 9$. Enligt Lagranges multiplikatorregel finns ett tal λ så att $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$ där minimum antas (eftersom $\nabla g(x,y,z) \neq \mathbf{0}$). Vi får då

$$\begin{cases} 2x = \lambda(8x - 3y), \\ 2y = -\lambda \cdot 3x, \\ 2z = \lambda \cdot 6, \end{cases}$$

så att $z = 3\lambda$, $y = -\frac{3\lambda}{2}x$, och $2x = \lambda x(8 + \frac{9\lambda}{2})$. En lösning är $x = 0$, vilket ger $y = 0$, $z = \frac{3}{2}$ (ur $g(x,y,z) = 9$) och $f(x,y,z) = \frac{9}{4}$. Om $x \neq 0$, fås $2 = \lambda(8 + \frac{9\lambda}{2})$ med lösningar $\lambda = \frac{2}{9}$ och $\lambda = -2$. För $\lambda = \frac{2}{9}$ fås $y = -\frac{1}{3}x$, $z = \frac{2}{3}$ och $g(x,y,z) = 4x^2 + x^2 + 4 = 9$, $x^2 = 1$, $f(x,y,z) = \frac{14}{9}$. För $\lambda = -2$ fås $y = 3x$, $z = -6$ och $g(x,y,z) = 4x^2 - 9x^2 - 36 = 9$, $x^2 = -9$, dvs. lösning saknas. Eftersom $\frac{14}{9} < \frac{9}{4}$, fås minimum i punkterna $(\pm 1, \mp\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, och minimivärdet är $\frac{14}{9}$.

---

4. Komplettera Y med ”botten” $Y_1 = \{(x,y,0) : x^2 + y^2 \le 1\}$, så att $Y + Y_1$ blir rand till kroppen $K = \{(x,y,z) : 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 \le 1\}$. Använd Gauss’ sats:

$$\iint_{Y+Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz = \iiint_K 4z^2\, dxdydz = \iint_{Y_1} \left\{\int_0^{1-x^2-y^2} 4z^2\, dz\right\} dxdy$$
$$= \iint_{Y_1} \frac{4}{3}(1 - x^2 - y^2)^3\, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{4}{3}(1 - r^2)^3 r\, dr d\varphi$$
$$= 2\pi \left[-\frac{1}{6}(1 - r^2)^4\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$

Nu är $\iint_{Y+Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS + \iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$, och

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{Y_1} \mathbf{F}(x,y,0)\cdot(0,0,-1)\,dxdy = -\iint_{Y_1} y^2\,dxdy = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\sin^2\varphi\, r\,drd\varphi$$
$$= -\int_0^1 r^3\,dr\cdot\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi = -\frac{\pi}{4}.$$

Alltså är $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \frac{\pi}{3} - (-\frac{\pi}{4}) = \boxed{\dfrac{7\pi}{12}}$.

---

5. Ytan $x^2+y^2-2x=0$ är den cirkulära cylindern $(x-1)^2+y^2=1$, $-\infty<z<\infty$; där är $0\le x\le 2$. På γ är $z=\sqrt{4-2x}$, och dess projektion γ_1 på xy-planet är därmed hela cirkeln $(x-1)^2+y^2=1$.

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma 2xye^{yz}\,dx + yz^2\,dx + x^2e^{yz}\,dy + x^2yze^{yz}\,dy + x^2y^2e^{yz}\,dz - yz\,dz$$
$$= \int_\gamma d(x^2ye^{yz}) + yz^2\,dx - yz\,dz = \int_\gamma yz^2\,dx - yz\,dz\,.$$

På γ är $z^2 = 4-2x$, $2z\,dz = -2\,dx$, så att

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma y(4-2x)\,dx + y\,dx = \int_{\gamma_1}(5y-2xy)\,dx = [\text{Greens formel}]$$
$$= \iint_{(x-1)^2+y^2\le 1}(2x-5)\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 [2(1+r\cos\varphi)-5]\,r\,drd\varphi$$
$$= -3\cdot 2\pi\int_0^1 r\,dr + \int_0^1 2r^2\,dr\cdot\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = -6\pi\cdot\frac{1}{2} = \boxed{-3\pi}.$$

---

6. Med $s=x^2-y^2$, $t=2xy$, har vi $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = 2x\frac{\partial u}{\partial s} + 2y\frac{\partial u}{\partial t}$ och $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y\frac{\partial u}{\partial s} + 2x\frac{\partial u}{\partial t}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(2x\frac{\partial u}{\partial s} + 2y\frac{\partial u}{\partial t}) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y\frac{\partial u}{\partial s} + 2x\frac{\partial u}{\partial t})$$
$$= 2x\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial s}) + 2\frac{\partial u}{\partial s} + 2y\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial t}) - 2y\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial s}) - 2\frac{\partial u}{\partial s} + 2x\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial t})$$
$$= 2x[2x\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial u}{\partial s}) + 2y\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial s})] + 2y[2x\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial u}{\partial t}) + 2y\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial t})]$$
$$-2y[-2y\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial u}{\partial s}) + 2x\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial s})] + 2x[-2y\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial u}{\partial t}) + 2x\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial t})]$$
$$= 4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 4xy\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s} + 4xy\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} + 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$+ 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - 4xy\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s} - 4xy\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} + 4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$= 4(x^2+y^2)(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}),$$

så att $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ medför $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$.
