Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del B** den 17/1 2003, kl. 8.45–12.45.
Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.
Telefon: Tobias Gebäck, tel 0740-45 90 22.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. a. Beräkna tangentplanet till ytan $e^z + (x+y)z - x^3 + y = 2$ i punkten $P = (1,2,0)$. (4p)

   b. Motivera att ytan lokalt kring P är en funktionsyta $z = f(x,y)$. Beräkna $f'_x(1,2)$ och $f'_y(1,2)$. (3p)

2. Bestäm största och minsta värde av funktionen $f(x,y) = 2x^3y - xy^2 - 5x$ i mängden $\{(x,y) : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\}$. (8p)

3. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \frac{1}{x^2} e^{\frac{y}{x}}\, dxdy$, då D är det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna
$$y = x, \quad y = 2x, \quad x + y = 1, \quad x + y = 3.$$ (7p)

4. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, då
$$\mathbf{F} = (zy^2 e^{xy^2}, 2xyze^{xy^2} + xy^2, e^{xy^2}),$$
och γ är spiralen $\mathbf{r} = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \le t \le 4\pi$. (7p)

5. Beräkna ytintegralen $\iint_Y (x^2 - 3y)\, dS$, då Y är triangelytan med hörnen $(1,0,0)$, $(2,1,0)$ och $(3,1,1)$. (8p)

6. Transformera differentialekvationen
$$2x^2 f''_{xx} - y^2 f''_{yy} - xy f''_{xy} + 4x f'_x = 0$$
genom att göra variabelbytet $s = xy$, $t = \frac{x}{y^2}$ $(x > 0,\ y > 0)$. Lös därefter ekvationen. (7p)

7. Visa att under lämpliga förutsättningar på funktionen $f(x,y)$ gäller att $f''_{xy} = f''_{yx}$. (8p)

8. Låt $f(x,y)$ vara kontinuerlig på ett kompakt område D. Dela in D i delområden. Vad menas med en Riemannsumma hörande till en viss indelning? Visa att Riemannsummorna konvergerar mot $\iint_D f(x,y)\, dxdy$ då indelningens finhet går mot noll. (8p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 17/1 2003

1. a. Ytan är en nivåyta till funktionen $F(x,y,z) = e^z + (x+y)z - x^3 + y$. Tangentplanet i $P = (1,2,0)$ har normalvektorn $\nabla F(P)$. Vi har $\nabla F = (z - 3x^2, z+1, e^z + x + y)$ och $\nabla F(P) = (-3,1,4)$. Tangentplanets ekvation är $-3 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-2) + 4 \cdot (z-0) = 0$, dvs. $\boxed{-3x + y + 4z + 1 = 0}$.

   b. Eftersom $F'_z(P) = 4 \neq 0$, säger implicita funktionssatsen att man lokalt kring P kan lösa $F(x,y,z) = 2$ på formen $z = f(x,y)$, där f är en C^1-funktion. Implicit derivering ger $F'_x + F'_z z'_x = 0$ och $F'_y + F'_z z'_y = 0$, varav $f'_x(1,2) = -F'_x(P)/F'_z(P) = \boxed{\frac{3}{4}}$, och $f'_y(1,2) = -F'_y(P)/F'_z(P) = \boxed{-\frac{1}{4}}$. (Detta kan också avläsas ur tangentplanets ekvation.)

---

2. Studera $f(x,y) = 2x^3y - xy^2 - 5x$ för $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$. Bestäm först ev. inre stationära punkter:

$$f'_x = 6x^2y - y^2 - 5 = 0,$$
$$f'_y = 2x^3 - 2xy = 2x(x^2 - y) = 0.$$

   Eftersom vi vill ha $x > 0$ fås ur andra ekvationen $y = x^2$, och sedan ger första ekvationen $6x^4 - x^4 - 5 = 5x^4 - 5 = 0$, så att $x^4 = 1$, $x = 1$, $y = 1$.
   Betrakta sedan randen. Vi skall undersöka $f_1(x) = f(x,0) = -5x$, $f_2(x) = f(x,2) = 4x^3 - 9x$, $f_3(y) = f(0,y) = 0$ och $f_4(y) = f(2,y) = 16y - 2y^2 - 10$ för $0 \le x \le 2$ och $0 \le y \le 2$. f_1 är strängt avtagande, och f_3 är konstant. Vidare är $f'_2(x) = 12x^2 - 9 = 0$ för $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, och $f'_4(y) = 16 - 4y > 0$ för $0 \le y \le 2$. Intresssanta funktionsvärden är $f(1,1) = -4$, $f(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2) = -3\sqrt{3}$ och värdena i hörnpunkterna $f(0,0) = f(0,2) = 0$, $f(2,0) = -10$, $f(2,2) = 14$. $\boxed{\text{Maximum är } f(2,2) = 14}$ och $\boxed{\text{minimum är } f(2,0) = -10}$.

---

3. Sätt $u = \frac{y}{x}$, $v = x + y$. Då blir integrationsområdet i uv-planet $D' = \{(u,v) : 1 \le u \le 2,\ 1 \le v \le 3\}$. Vi har

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{y}{x^2} - \frac{1}{x} = -\frac{x+y}{x^2}, \quad dxdy = \frac{1}{\left|\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right|} dudv = \frac{x^2}{x+y} dudv.$$

   Alltså är

$$\iint_D \frac{1}{x^2} e^{\frac{y}{x}}\, dxdy = \iint_{D'} \frac{1}{v} e^u\, dudv = \int_1^2 e^u\, du \int_1^3 \frac{1}{v}\, dv = \boxed{(e^2 - e)\ln 3}.$$

---

4. Vi har $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, där $\mathbf{F}_1 = (zy^2 e^{xy^2}, 2xyze^{xy^2}, e^{xy^2})$ och $\mathbf{F}_2 = (0, xy^2, 0)$.

$$\int_\gamma \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma zy^2 e^{xy^2} dx + 2xyze^{xy^2} dy + e^{xy^2} dz = \int_\gamma d(ze^{xy^2})$$
$$= \left[ze^{xy^2}\right]_{(1,0,0)}^{(1,0,4\pi)} = 4\pi.$$

   Kurvans projektion på xy-planet är enhetscirkeln C genomlöpt två varv i positiv led. Om D är cirkelskivan $x^2 + y^2 \le 1$, ger Greens formel

$$\int_\gamma \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma xy^2 dy = 2\int_C xy^2 dy = 2\iint_D y^2\, dxdy = \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^1 r^3 dr = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

   Alltså är $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 4\pi + \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{9\pi}{2}}$.

---

5. Det plan som går genom punkterna $(1,0,0)$, $(2,1,0)$ och $(3,1,1)$ spänns upp av vektorerna $(1,1,0)$ och $(2,1,1)$. Därför är planets (och Y:s) normalriktning $(1,1,0)\times(2,1,1)=(1,-1,-1)$. Den uppåtriktade enhetsnormalen är $\mathbf{n}=(-1,1,1)/\sqrt{3}$. Vi ser Y som en funktionsyta och använder x och y som parametrar. Då har vi $dS=\frac{1}{\cos\theta}\,dxdy$, där θ är vinkeln mellan $\mathbf{n}$ och $\hat{z}$, dvs. $\cos\theta=1/\sqrt{3}$. Integrationsområdet D i xy-planet är ytans projektion på xy-planet, dvs. triangeln med hörn i $(1,0)$, $(2,1)$ och $(3,1)$. Triangeln begränsas av linjerna $y=x-1$, $y=\frac{1}{2}(x-1)$ och $y=1$. Alltså är

$$\iint_Y (x^2-3y)\,dS=\iint_D (x^2-3y)\sqrt{3}\,dxdy=\sqrt{3}\int_0^1\left\{\int_{y+1}^{2y+1}(x^2-3y)\,dx\right\}dy$$
$$=\sqrt{3}\int_0^1\left[\frac{x^3}{3}-3xy\right]_{x=y+1}^{x=2y+1}dy=\sqrt{3}\int_0^1\left\{\frac{1}{3}(2y+1)^3-3y(2y+1)-\frac{1}{3}(y+1)^3+3y(y+1)\right\}dy$$
$$=\sqrt{3}\int_0^1\left(\frac{7}{3}y^3+y\right)dy=\sqrt{3}\left[\frac{7}{12}y^4+\frac{1}{2}y^2\right]_0^1=\sqrt{3}\left(\frac{7}{12}+\frac{1}{2}\right)=\boxed{\frac{13}{12}\sqrt{3}}.$$

---

6. Med $s=xy$, $t=\frac{x}{y^2}$ har vi $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial s}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{2x}{y^3}\frac{\partial f}{\partial t}$, och

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial f}{\partial s}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial f}{\partial t}\right)=y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)+\frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)$$
$$=y\left(y\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right)+\frac{1}{y^2}\left(y\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)=y^2\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}+\frac{1}{y^4}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\frac{2}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{2x}{y^3}\frac{\partial f}{\partial t}\right)=x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)-\frac{2x}{y^3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)+\frac{6x}{y^4}\frac{\partial f}{\partial t}$$
$$=x\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}-\frac{2x}{y^3}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right)-\frac{2x}{y^3}\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}-\frac{2x}{y^3}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)+\frac{6x}{y^4}\frac{\partial f}{\partial t}$$
$$=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}+\frac{4x^2}{y^6}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-\frac{4x^2}{y^3}\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}+\frac{6x}{y^4}\frac{\partial f}{\partial t},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial f}{\partial s}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial f}{\partial t}\right)=y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)+\frac{\partial f}{\partial s}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)-\frac{2}{y^3}\frac{\partial f}{\partial t}$$
$$=y\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}-\frac{2x}{y^3}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right)+\frac{1}{y^2}\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}-\frac{2x}{y^3}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)+\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{2}{y^3}\frac{\partial f}{\partial t}$$
$$=xy\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}-\frac{2x}{y^5}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-\frac{x}{y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}+\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{2}{y^3}\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Då får vi

$$2x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-xy\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+4x\frac{\partial f}{\partial x}$$
$$=2x^2\left(y^2\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}+\frac{1}{y^4}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\frac{2}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}\right)-y^2\left(x^2\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}+\frac{4x^2}{y^6}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-\frac{4x^2}{y^3}\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}+\frac{6x}{y^4}\frac{\partial f}{\partial t}\right)$$
$$-xy\left(xy\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}-\frac{2x}{y^5}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-\frac{x}{y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}+\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{2}{y^3}\frac{\partial f}{\partial t}\right)+4x\left(y\frac{\partial f}{\partial s}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial f}{\partial t}\right)$$
$$=\frac{9x^2}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}+3xy\frac{\partial f}{\partial s}=0,$$

så att $\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}+\frac{y^2}{3x}\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}+\frac{1}{3t}\frac{\partial f}{\partial s}=0$. Med $g=\frac{\partial f}{\partial s}$ har vi alltså $\frac{\partial g}{\partial t}+\frac{1}{3t}g=0$. Integrerande faktor är $e^{\int\frac{1}{3t}dt}=t^{1/3}$, så att $\frac{\partial}{\partial t}(t^{1/3}g)=0$, $t^{1/3}g=\varphi_1(s)$, där φ_1 är en godtycklig C^1-funktion. Vi får $\frac{\partial f}{\partial s}=t^{-1/3}\varphi_1(s)$, och $f=t^{-1/3}\int\varphi_1(s)\,ds+\psi(t)=t^{-1/3}\varphi(s)+\psi(t)$. Alltså är

$$\boxed{f(x,y)=x^{-1/3}y^{2/3}\varphi(xy)+\psi\left(\frac{x}{y^2}\right)}$$

där φ och ψ är godtyckliga C^2-funktioner.
