Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del B** den 27/8 2003, kl. 14.15–18.15.
Hjälpmedel: "Användarhandledning för MATLAB" av Pärt-Enander–Sjöberg.
Telefon: Georgios Foufas, tel. 0702-74 09 02.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Taylorutveckla funktionen

$$f(x,y) = \frac{1}{1-x+y^2}e^{x+2y} - 4\sqrt{1+\sin(x+y)}$$

kring origo med termer t.o.m. andra graden (plus restterm). Visa att har f en stationär punkt i origo och avgör dess karaktär. (7p)

2. Beräkna $\iiint_K (x^2+yz)\,dxdydz$, då K är kroppen som definieras av olikheterna

$$\begin{cases} 0 \le x+y+2z \le 3, \\ 0 \le z-y \le 2, \\ 0 \le 2x-y+z \le 3. \end{cases} \qquad (8p)$$

3. Bestäm maximum av $x+2y+3z$, då $x^2+y^2+2z^2+xy+2yz=2$. (7p)

4. a. Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$, då Y är ytan $z^2 = x^2+y^2-1$, $0 \le z \le 1$, med normalriktning bort från origo, och

$$\mathbf{F} = (zx^3, zy^3, x^2+y^2). \qquad (6p)$$

b. Skriv en MATLAB-kod för att plotta ytan Y. Visa ytan med ett rutnät med en likformig indelning i z-led. (3p)

5. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, då

$$\mathbf{F} = \big(yz\cos x + y^2,\ z\sin x,\ y\sin x + x^2\big),$$

och γ är skärningen mellan $z = 1-\sqrt{x^2+y^2}$ och planet $y+2z=0$. Kurvan genomlöps i positiv led sedd "uppifrån" (från positiva z-axeln). (7p)

6. Lös differentialekvationen

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

genom att göra variabelbytet $s = x+2y$, $t = x^2$ $(x>0)$. (7p)

7. Hur definieras riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})$? Visa hur $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})$ kan uttryckas med hjälp av gradienten. Vad säger detta om gradientens fysikaliska betydelse? (7p)

8. a. Ange vad som menas med att ett vektorfält $\mathbf{F} = (P,Q)$ är ett potentialfält. (2p)

b. Visa att om kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen i en sammanhängande öppen mängd Ω, så är $\mathbf{F}$ ett potentialfält i Ω. (6p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 27/8 2003

1. Med hjälp, av envariabelutvecklingarna $\frac{1}{1-t} = 1+t+t^2+O(t^3)$, $e^t = 1+t+\frac{1}{2}t^2+O(t^3)$, $\sin t = t+O(t^3)$, $\sqrt{1+t} = (1+t)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+O(t^3)$, då $t \to 0$, fås

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \Big(1+x-y^2+x^2+O(r^3)\Big)\Big(1+(x+2y)+\frac{1}{2}(x+2y)^2+O(r^3)\Big) \\ &\quad -4\Big(1+\frac{1}{2}(x+y)-\frac{1}{8}(x+y)^2+O(r^3)\Big) = -3+3x^2+5xy+\frac{3}{2}y^2+O(r^3), \end{aligned}$$

då $r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$. Detta är den sökta Taylorutvecklingen. Det framgår att $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, så att origo är en stationär punkt. Eftersom den kvadratiska formen $3x^2+5xy+\frac{3}{2}y^2$ kan skrivas $\frac{3}{2}(y+\frac{5}{3}x)^2 - \frac{7}{6}x^2$, är den indefinit, och origo är en <u>sadelpunkt.</u>

---

2. Sätt $u = x+y+2z$, $v = -y+z$, $w = 2x-y+z$. Då beskrivs området av $0 \le u \le 3$, $0 \le v \le 2$, $0 \le w \le 3$. Vi har

$$\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6,$$

och $x = \frac{1}{2}(w-v)$, $y = \frac{1}{6}(2u-3v-w)$, $z = \frac{1}{6}(2u+3v-w)$. Vid variabelbytet har vi alltså $dxdydz = \frac{1}{6}dudvdw$, så att

$$\begin{aligned} \iiint_K (x^2+yz)\,dxdydz &= \int_0^3\int_0^2\int_0^3 \left[\frac{1}{4}(w-v)^2 + \frac{1}{36}\big((2u-w)^2-9v^2\big)\right]\frac{1}{6}\,dudvdw \\ &= \frac{1}{6}\int_0^3\int_0^2\int_0^3 (\frac{1}{9}u^2 - \frac{1}{9}uw - \frac{1}{2}vw + \frac{5}{18}w^2)dudvdw = \frac{1}{6}\int_0^3\int_0^2 (1-\frac{1}{2}w-\frac{3}{2}vw+\frac{5}{6}w^2)dvdw \\ &= \frac{1}{6}\int_0^3 (2-w-3w+\frac{5}{3}w^2)dw = \frac{1}{6}(6-18+15) = \boxed{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

---

3. Sök maximum av $f(x,y,z) = x+2y+3z$ under bivillkoret $g(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2+xy+2yz = 2$. Eftersom $g(x,y,z) = (x+\frac{1}{2}y)^2+2(z+\frac{1}{2}y)^2+\frac{1}{4}y^2$, är mängden $\{(x,y,z) : g(x,y,z) = 2\}$ kompakt. Alltså antas maximum. Enligt Lagranges multiplikatorregel finns ett tal λ så att $\nabla f(x,y,z) = \lambda\nabla g(x,y,z)$ där maximum antas (såvida inte $\nabla g(x,y,z) = \mathbf{0}$, vilket vi kan utesluta eftersom det skulle ge $2x+y = 2y+x+2z = 4z+2y = 0$, $x = y = z = 0$, vilket är oförenligt med $g(x,y,z) = 2$). Vi får då

$$\begin{cases} 1 = \lambda(2x+y), \\ 2 = \lambda(2y+x+2z), \\ 3 = \lambda(4z+2y), \end{cases}$$

så att

$$\frac{1}{\lambda} = 2x+y = \frac{1}{2}x+y+z = \frac{2}{3}y+\frac{4}{3}z, \qquad z = \frac{3}{2}x,\ 2x+\frac{1}{3}y = \frac{4}{3}z = 2x,$$

dvs. $y = 0$, $z = \frac{3}{2}x$. Villkoret $g(x,y,z) = 2$ ger $(1+\frac{9}{2})x^2 = \frac{11}{2}x^2 = 2$, $x = \pm\frac{2}{\sqrt{11}}$. Vi får punkterna $(x,y,z) = \pm\frac{1}{\sqrt{11}}(2,0,3)$ med $f(x,y,z) = \pm\frac{1}{\sqrt{11}}(2+0+9) = \pm\sqrt{11}$. Alltså är max.värdet $\boxed{\sqrt{11}}$.

---

4. a. Om man kompletterar Y med $Y_1 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 2,\ z = 1\}$ och $Y_2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1,\ z = 0\}$, så blir $Y+Y_1+Y_2$ rand till kroppen $K = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1+z^2,\ 0 \le z \le 1\}$. Använd Gauss' sats:

$$\begin{aligned} \iint_{Y+Y_1+Y_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \iiint_K \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = \iiint_K 3(x^2+y^2)z\,dxdydz \\ &= 3\int_0^1 z\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{1+z^2}} r^2 r\,dr d\varphi\right\}dz = 3\int_0^1 z\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}(1+z^2)^2\,dz \\ &= \frac{3\pi}{2}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(1+z^2)^3\right]_{z=0}^1 = \frac{\pi}{4}(8-1) = \frac{7\pi}{4}. \end{aligned}$$

Nu är $\iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{x^2+y^2\le 2} \mathbf{F}(x,y,1)\cdot(0,0,1)\,dxdy = \iint_{x^2+y^2\le 2}(x^2+y^2)dxdy$ och $\iint_{Y_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{x^2+y^2\le 1} \mathbf{F}(x,y,0)\cdot(0,0,-1)\,dxdy = -\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy$, så att

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \frac{7\pi}{4} - \iint_{1\le x^2+y^2\le 2}(x^2+y^2)dxdy = \frac{7\pi}{4} - \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}} r^2 r\,dr d\varphi$$
$$= \frac{7\pi}{4} - 2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{7\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

b. Ett exempel på MATLAB-kod:

```
[z,v]=meshgrid(0:0.1:1,0:2*pi/25:2*pi);
r=sqrt(z.^2+1);
x=r.*cos(v);
y=r.*sin(v);
mesh(x,y,z)
```

---

5. Ekvationen för γ: $z = 1-\sqrt{x^2+y^2}$, $y+2z=0$. Eliminera z för att få projektionen γ_1 på xy-planet: $\sqrt{x^2+y^2} = 1+\frac{y}{2}$, $x^2+y^2 = 1+\frac{1}{4}y^2+y$, $x^2+\frac{3}{4}y^2-y=1$, vilket ger ellipsen $\frac{x^2}{\frac{4}{3}} + \frac{(y-\frac{2}{3})^2}{(\frac{4}{3})^2} = 1$ (observera att $y\ge -\frac{2}{3}$ så att $1+\frac{y}{2}>0$). Vi har

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = yz\cos x\,dx + z\sin x\,dy + y\sin x\,dz + y^2\,dx + x^2\,dz = d(yz\sin x) + y^2\,dx + x^2\,dz.$$

Eftersom γ är sluten, och $z=-\frac{y}{2}$ på γ, är

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma (y^2\,dx + x^2\,dz) = \int_\gamma (y^2\,dx - \frac{1}{2}x^2\,dy) = \int_{\gamma_1} (y^2\,dx - \frac{1}{2}x^2\,dy).$$

Om D är området innanför γ_1, ger Greens formel

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D (-x-2y)\,dxdy = \left[x = \frac{2}{\sqrt{3}}r\cos\varphi,\ y = \frac{2}{3}+\frac{4}{3}r\sin\varphi,\ dxdy = \frac{8}{3\sqrt{3}}r\,drd\varphi\right]$$
$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{2}{\sqrt{3}}r\cos\varphi + \frac{4}{3} + \frac{8}{3}r\sin\varphi\right)\frac{8}{3\sqrt{3}}r\,drd\varphi = \left[\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi = 0\right]$$
$$= -\frac{32}{9\sqrt{3}}2\pi\int_0^1 r\,dr = \boxed{-\frac{32\pi}{9\sqrt{3}}}.$$

---

6. Med $s=x+2y$, $t=x^2$ blir $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t}\cdot 2x$ och $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial s}\cdot 2$. Vidare fås

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial s}) + 2x\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial t}) + 2\frac{\partial u}{\partial t} = (\frac{\partial}{\partial s} + 2x\frac{\partial}{\partial t})(\frac{\partial u}{\partial s}) + 2x(\frac{\partial}{\partial s} + 2x\frac{\partial}{\partial t})(\frac{\partial u}{\partial t}) + 2\frac{\partial u}{\partial t}$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 4x\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} + 4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial u}{\partial t},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial s}) = 2(\frac{\partial}{\partial s} + 2x\frac{\partial}{\partial t})(\frac{\partial u}{\partial s}) = 2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 4x\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial s}) = 4\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial u}{\partial s}) = 4\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}.$$

Ekvationen $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ övergår i $16x^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 8\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ eller $2t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Vi får en första ordningens ekvation för $v = \frac{\partial u}{\partial t}$. Med hjälp av en integrerande faktor blir den $\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{t}v) = 0$, så att $\sqrt{t}v = c_1(s)$, och $\frac{\partial u}{\partial t} = v = \frac{1}{\sqrt{t}}c_1(s)$, $u = 2\sqrt{t}c_1(s) + c_2(s)$. Allmänna lösningen till den givna ekvationen blir då $\underline{u = x\varphi(x+2y) + \psi(x+2y)}$, där φ och ψ är två godtyckliga C^2-funktioner i en variabel.
