Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell Matematisk analys F, del B** den 25/8 2004, kl. 14.15–18.15.

Hjälpmedel: "Användarhandledning för MATLAB" av Pärt-Enander–Sjöberg.
Telefon: Fredrik Bengzon, tel. 073-977 92 68.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Betrakta funktionen $f(x,y,z) = xz^2 + ye^{xy}$.

   a. Vilka av följande uttryck är definierade: $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{div} f$, $\operatorname{rot} f$, $\operatorname{grad}\operatorname{grad} f$, $\operatorname{div}\operatorname{grad} f$, $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f$? Beräkna de uttryck som existerar. (3p)

   b. Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(1,0,-1)$ i riktningen $(-1,2,1)$. (2p)

   c. Beräkna tangentplanet till ytan $f(x,y,z) = 1$ i punkten $(1,0,-1)$. (2p)

2. Taylorutveckla funktionen

   $$f(x,y) = \sin(e^{x-2y} - 1 + 4y) - 2\ln\sqrt{1+x+2y}$$

   kring origo med termer t.o.m. andra graden (plus restterm). Det finns en konstant a så att gränsvärdet

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)+ax^2}{x^2+y^2}$$

   existerar. Bestäm a och gränsvärdet. (8p)

3. Beräkna $\iint_D x^3 e^{y+x^2}\,dxdy$, där D är det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna

   $$y = x^2, \quad y = x^2+1, \quad y = 2-x^2, \quad y = 4-x^2. \qquad (7p)$$

4. Låt Y vara ytan $x = u^2+v^2$, $y = u^2-v^2$, $z = 2uv$, $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1$.

   a. Beräkna arean av Y. (4p)

   b. Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$, då $\mathbf{F} = (x,0,z)$. (3p)

   c. Skriv en MATLAB-kod för att plotta Y. (2p)

5. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, då

   $$\mathbf{F} = \frac{(x^2y+y^3-x,\ -x^3-xy^2-y)}{(x^2+y^2)^2},$$

   och γ är ellipsbågen $4x^2+y^2 = 1$ i första kvadranten från $(\frac{1}{2},0)$ till $(0,1)$. (7p)

6. Lös differentialekvationen

   $$x^2u'_x + e^y u'_y = u+1, \quad x>0.$$

   Bestäm en lösning som uppfyller $u(x,0) = x^2$. (7p)

7. Härled Taylors formel för en funktion av två variabler med restterm av ordning 3. (7p)

8. Formulera och bevisa Greens formel. (8p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 25/8 2004

1. a. grad är definierad för skalära funktioner, div för vektorfunktioner och rot för vektorfunktioner med tre komponenter. För $f(x,y,z) = xz^2 + ye^{xy}$ ä r

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\big) = \big(z^2 + y^2 e^{xy}, (1+xy)e^{xy}, 2xz\big).$$

div f, rot f och grad grad f är odefinierade, medan

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \nabla\cdot\nabla f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= y^3 e^{xy} + (1+xy)xe^{xy} + xe^{xy} + 2x \\ &= \big(y^3 + 2x + x^2 y\big)\, e^{xy} + 2x,\end{aligned}$$

och rot grad $f = \nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$ generellt.

b. Riktningsderivatan är $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{v}$. Här är $\mathbf{a} = (1,0,-1)$ och $\mathbf{v} = \frac{(-1,2,1)}{\sqrt{6}}$ så att $\nabla f(\mathbf{a}) = (1,1,-2)$ och $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1+2-2) = \underline{-\frac{1}{\sqrt{6}}}$.

c. Punkten $\mathbf{a} = (1,0,-1)$ ligger på ytan $f(x,y,z) = 1$, och en normalvektor är $\nabla f(\mathbf{a}) = (1,1,-2)$. Allltså är tangentplanets ekvation $1\cdot(x-1) + 1\cdot(y-0) - 2(z+1) = 0$, eller $\underline{x + y - 2z - 3 = 0}$.

---

2. Använd envariabelutvecklingarna $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$, $\sin t = t + O(t^3)$, $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ då $t \to 0$. Då fås (då $r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$)

$$\begin{aligned}e^{x-2y} - 1 + 4y &= 1 + x - 2y + \frac{1}{2}(x-2y)^2 + O(r^3) - 1 + 4y = x + 2y + \frac{1}{2}(x-2y)^2 + O(r^3),\\ \sin(e^{x-2y} - 1 + 4y) &= x + 2y + \frac{1}{2}(x-2y)^2 + O(r^3) = x + 2y + \frac{1}{2}x^2 - 2xy + 2y^2 + O(r^3),\\ 2\ln\sqrt{1+x+2y} &= \ln(1+x+2y) = x + 2y - \frac{1}{2}(x+2y)^2 + O(r^3) = x + 2y - \frac{1}{2}x^2 - 2xy - 2y^2 + O(r^3),\\ f(x,y) &= \sin(e^{x-2y} - 1 + 4y) - 2\ln\sqrt{1+x+2y} = x^2 + 4y^2 + O(r^3).\end{aligned}$$

Då är

$$\frac{f(x,y) + ax^2}{x^2+y^2} = \frac{(1+a)x^2 + 4y^2}{x^2+y^2} + O(r),$$

som har gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$ om och endast om $\underline{a = 3}$, och gränsvärdet är i så fall $\underline{4}$.

---

3. Sätt $u = y + x^2$, $v = y - x^2$. Då motsvaras området D av $D' = \{(u,v) : 2 \le u \le 4,\ 0 \le v \le 1\}$ i uv-planet. Vi har

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & 1 \\ -2x & 1 \end{vmatrix} = 4x, \quad dxdy = \frac{1}{\left|\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right|}dudv = \frac{1}{4x}dudv,$$

och $x^2 = \frac{1}{2}(u-v)$, så att

$$\begin{aligned}\iint_D x^3 e^{y+x^2}\, dxdy &= \iint_{D'} \frac{1}{2}(u-v)e^u \frac{1}{4}dudv = \frac{1}{8}\int_2^4 \left\{\int_0^1 (u-v)e^u\, dv\right\} du\\ &= \frac{1}{8}\int_2^4 (u - \frac{1}{2})e^u\, du = \frac{1}{8}\left\{\left[(u-\frac{1}{2})e^u\right]_2^4 - \int_2^4 e^u\, du\right\}\\ &= \frac{1}{8}\left\{\frac{7}{2}e^4 - \frac{3}{2}e^2 - (e^4 - e^2)\right\} = \underline{\frac{1}{16}(5e^4 - e^2)}.\end{aligned}$$

---

4. $\mathbf{r} = (u^2+v^2, u^2-v^2, 2uv)$, $\mathbf{r}'_u = (2u, 2u, 2v)$, $\mathbf{r}'_v = (2v, -2v, 2u)$. En normalvektor ä r

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = 4\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ u & u & v \\ v & -v & u \end{vmatrix} = 4(u^2+v^2, v^2-u^2, -2uv),$$

och ytelementet är $dS = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| dudv$, där

$$|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| = 4\sqrt{(u^2+v^2)^2+(v^2-u^2)^2+4u^2v^2} = 4\sqrt{2}\sqrt{u^4+v^4+2u^2v^2} = 4\sqrt{2}(u^2+v^2).$$

a. Arean är $\iint_Y dS = \int_0^1 \int_0^1 4\sqrt{2}(u^2+v^2)dudv = 4\sqrt{2}(\frac{1}{3}\cdot 1 + 1\cdot\frac{1}{3}) = \underline{\frac{8\sqrt{2}}{3}}$.

b. Vi har

$$\begin{aligned}\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \int_0^1\int_0^1 \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v\,dudv = \int_0^1\int_0^1 4[(u^2+v^2)^2-4u^2v^2]dudv \\ &= 4\int_0^1\int_0^1 (u^4+v^4-2u^2v^2)dudv = 4(\frac{1}{5}\cdot 1 + 1\cdot\frac{1}{5} - 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}) = \underline{\frac{32}{45}}.\end{aligned}$$

c. Exempel på en MATLAB-kod:

```
[u,v]=meshgrid(0:0.05:1);
x=u.^2+v.^2; y=u.^2-v.^2; z=2*u.*v;
mesh(x,y,z)
```

---

5. $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \frac{(x^2y+y^3-x)dx-(x^3+xy^2+y)dy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^2+y^2)dx-xdx-x(x^2+y^2)dy-ydy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2} - \frac{xdx+ydy}{(x^2+y^2)^2}$. För de polära koordinaterna r och φ är $rdr = xdx+ydy$, och $d\varphi = \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ ("det magnetiska fältet"). Alltså är $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -d\varphi - \frac{dr}{r^3} = -d\varphi + \frac{1}{2}d(\frac{1}{r^2})$, och

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma d(-\varphi + \frac{1}{2r^2}) = \left[-\varphi+\frac{1}{2r^2}\right]_{(\frac{1}{2},0)}^{(0,1)} = -\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}+0-2 = \underline{-\frac{1}{2}(3+\pi)}.$$

---

6. $x^2u'_x + e^yu'_y = u+1$. Karakteristikernas diferentialekvation (i xy-planet) är $\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{e^y}$ med lösning $-\frac{1}{x} = -e^{-y}-C$, $\frac{1}{x}-e^{-y} = C$. Sätt $s = \frac{1}{x}-e^{-y}$, $t = x$. Då är

$$u'_x = u'_s\cdot(-\frac{1}{x^2}) + u'_t\cdot 1, \qquad u'_y = u'_s\cdot e^{-y} + u'_t\cdot 0,$$

och

$$x^2u'_x + e^yu'_y = -u'_s + x^2u'_t + u'_s = t^2u'_t = u+1.$$

Vi får $u'_t - \frac{1}{t^2}u = \frac{1}{t^2}$. Integrerande faktor $e^{1/t}$: $\frac{\partial}{\partial t}(e^{1/t}u) = \frac{1}{t^2}e^{1/t}$, $e^{1/t}u = -e^{1/t}+g(s)$,

$$u = g(s)e^{-1/t} - 1 = g(\frac{1}{x}-e^{-y})e^{-1/x} - 1,$$

där g är en godtycklig C^1-funktion i en variabel. Vi vill ha $u(x,0) = g(\frac{1}{x}-1)e^{-1/x}-1 = x^2$, $g(\frac{1}{x}-1) = (x^2+1)e^{1/x}$. Med $s = \frac{1}{x}-1$ har vi $x = \frac{1}{s+1}$ och $g(s) = (\frac{1}{(s+1)^2}+1)e^{s+1}$ (för $s > -1$). Alltså får vi lösningen

$$u(x,y) = \Big(\frac{1}{(\frac{1}{x}-e^{-y}+1)^2}+1\Big)e^{1/x-e^{-y}+1}e^{-1/x} - 1 = \underline{\Big(\frac{1}{(\frac{1}{x}-e^{-y}+1)^2}+1\Big)e^{1-e^{-y}} - 1}.$$
