Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell Matematisk analys F, del B** den 14/3 2005, kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: ”Användarhandledning för MATLAB” av Pärt-Enander–Sjöberg.
Telefon: Niclas Andréasson, 0739-77 92 68
För godkänt krävs minst 24 poäng.
Lösningar anslås i Matematiskt Centrum efter tentamen.
Resultatet anslås i Matematiskt Centrum senast tre veckor efter tentamen.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Funktionen $f(x,y)$ satisfierar differentialekvationen

$$2xf'_x(x,y) + 3yf'_y(x,y) = 0 \text{ för } x > 0,\ y > 0.$$

Visa att kurvan $x = t^2$, $y = t^3$, $t > 0$, är en nivåkurva till f. (8p)

2. Beräkna $\iint_D \frac{(2x^4+3x^2+1)y^2}{x^3}\, dxdy$, då D är det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna

$$y = \frac{1}{1+x^2}, \quad y = \frac{3}{1+x^2}, \quad y = x^2, \quad y = \frac{x^2}{2}.$$ (8p)

3. Låt $d_1 = d_1(x,y)$ och $d_2 = d_2(x,y)$ vara avstånden från (x,y) till $(2,0)$ resp. $(-2,2)$. Minimera $d_1^2 + d_2^2$ då (x,y) uppfyller $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. (8p)

4. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, då

$$\mathbf{F} = \Big(\frac{xz}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + xz,\ \frac{yz}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - xy,\ \sqrt{1+x^2+y^2} + xy\Big)$$

och γ är skärningen mellan ytorna $x^2+y^2+z=1$ och $x-2y+z=1$. Kurvans projektion på xy-planet är positivt orienterad. (8p)

5. a. Låt K vara kroppen som definieras av olikheterna $y^2+z^2 \le 1$ och $z \ge x^2$. Beräkna $\iint_{\partial K} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS$ (normalriktning utåt), då $\mathbf{F} = (0,\ yz\sqrt{1-x^4},\ \sqrt{1-x^4})$. (8p)
   b. Skriv en MATLAB-kod för att rita ∂K. (4p)

6. Vad menas med att en funktion $f(x,y)$ är differentierbar i en punkt (x_0,y_0)? Visa att om f är av klassen C^1 i en omgivning av (x_0,y_0), så är f differentierbar i (x_0,y_0). (8p)

7. Formulera och bevisa Gauss' sats. (8p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 14/3 2005

1. Man vet att $2xf'_x(x,y) + 3yf'_y(x,y) = 0$ för $x > 0$, $y > 0$. Enligt kedjeregeln är

$$\frac{d}{dt}f(t^2,t^3) = f'_x(t^2,t^3)\cdot 2t + f'_y(t^2,t^3)\cdot 3t^2 = \frac{1}{t}[2t^2 f'_x(t^2,t^3) + 3t^3 f'_y(t^2,t^3)] = 0.$$

Alltså är $f(t^2,t^3)$ konstant, dvs. kurvan $(x,y) = (t^2,t^3)$ är en nivåkurva till f.

---

2. Sätt $u = y(1+x^2)$, $v = \frac{y}{x^2}$. Då blir integrationsområdet $D' = \{(u,v) : 1 \le u \le 3, \frac{1}{2} \le v \le 1\}$ i uv-planet. Vi har

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 2xy & 1+x^2 \\ -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x} + \frac{2y}{x^3}(1+x^2) = \frac{2y}{x^3}(2x^2+1),$$

$$dxdy = \frac{1}{\left|\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right|}dudv = \frac{x^3}{2y(2x^2+1)}dudv.$$

Alltså är

$$\iint_D \frac{(2x^4+3x^2+1)y^2}{x^3}\,dxdy = \iint_{D'} \frac{(2x^2+1)(x^2+1)y^2}{x^3}\,\frac{x^3}{2y(2x^2+1)}\,dudv$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{D'} y(x^2+1)\,dudv = \frac{1}{2}\iint_{D'} u\,dudv = \frac{1}{2}\int_1^3 u\,du \int_{\frac{1}{2}}^1 dv = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}(9-1) = \underline{\underline{1}}.$$

---

3. Minimera $f(x,y) = d_1(x,y)^2 + d_2(x,y)^2 = (x-2)^2 + y^2 + (x+2)^2 + (y-2)^2 = 2x^2 + 8 + y^2 + (y-2)^2$ under bivillkoret $g(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. I punkter där minimum antas finns ett tal λ så att $\nabla f = \lambda \nabla g$ (eftersom $\nabla g = (2x, \frac{y}{2}) \neq (0,0)$ då $g = 1$). Alltså gäller

$$\begin{cases} 4x = \lambda 2x, \\ 2y + 2(y-2) = \lambda\frac{y}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x(2-\lambda) = 0, \\ y(4-\frac{\lambda}{2}) = 4. \end{cases}$$

Ur första ekvationen fås $x = 0$ eller $\lambda = 2$. Om $x = 0$ fås $g(0,y) = \frac{y^2}{4} = 1$, $y = \pm 2$, med funktionsvärden $f(0,2) = 12$, $f(0,-2) = 28$. Om $\lambda = 2$ ger andra ekvationen $3y = 4$, $y = \frac{4}{3}$, och vi får $g(x,\frac{4}{3}) = x^2 + \frac{16}{4\cdot 9} = x^2 + \frac{4}{9} = 1$, $x^2 = \frac{5}{9}$, $x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ med $f(\pm\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{4}{3}) = 2\cdot\frac{5}{9} + 8 + \frac{16}{9} + \frac{4}{9} = 8 + \frac{30}{9} = 8 + \frac{10}{3} = \frac{34}{3} < 12$. Alltså fås $\underline{\text{minimivärdet } \frac{34}{3} \text{ i punkterna } (\pm\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{4}{3})}$.

---

4. Projektionen γ_1 på xy-planet av kurvan γ fås av $(z =)\ 1-x^2-y^2 = 1-x+2y$, dvs. $(x-\frac{1}{2})^2 + (y+1)^2 = \frac{5}{4}$. Låt D vara området innanför γ_1. På γ är $dz = -dx + 2dy$, så att

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma \left(\frac{xz}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + xz\right)dx + \left(\frac{yz}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - xy\right)dy + \left(\sqrt{1+x^2+y^2} + xy\right)dz$$

$$= \int_\gamma d(z\sqrt{1+x^2+y^2}) + \int_\gamma xz\,dx - xy\,dy + xy\,dz$$

$$= 0 + \int_{\gamma_1} x(1-x+2y)\,dx - xy\,dy + xy(-dx+2dy) = \int_{\gamma_1}(x - x^2 + xy)\,dx + xy\,dy$$

$$= [\text{Greens formel}] = \iint_D (y-x)\,dxdy$$

$$= [\text{polära koord.}, x = \frac{1}{2} + r\cos\varphi,\ y = -1 + r\sin\varphi,\ 0 \le r \le \frac{\sqrt{5}}{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ dxdy = r\,drd\varphi]$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{5}/2}(-1 + r\sin\varphi - \frac{1}{2} - r\cos\varphi)r\,drd\varphi = -\frac{3}{2}\cdot 2\pi\int_0^{\sqrt{5}/2} r\,dr = -3\pi\cdot\frac{1}{2}\left[r^2\right]_0^{\sqrt{5}/2}$$

$$= -\frac{3\pi}{2}\frac{5}{4} = \underline{-\frac{15\pi}{8}}.$$

---

5. Kroppen K ges av $y^2+z^2 \le 1$, $z \ge x^2$ eller $x^2 \le z \le \sqrt{1-y^2}$ för $(x,y) \in D = \{(x,y) : x^4+y^2 \le 1\}$.
   a. Enligt Gauss' sats är

$$
\begin{aligned}
\iint_{\partial K} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \iiint_K \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = \iiint_K z\sqrt{1-x^4}\,dxdydz \\
&= \iint_D \left\{\int_{x^2}^{\sqrt{1-y^2}} z\sqrt{1-x^4}\,dz\right\} dxdy = \iint_D \sqrt{1-x^4}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{x^2}^{\sqrt{1-y^2}} dxdy \\
&= \frac{1}{2}\iint_D (1-y^2-x^4)\sqrt{1-x^4}\,dxdy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^4}\left\{\int_{-\sqrt{1-x^4}}^{\sqrt{1-x^4}}(1-x^4-y^2)\,dy\right\}dx \\
&= 2\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\left[(1-x^4)y-\frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{1-x^4}} dx = 2\int_0^1 (1-x^4)(1-x^4-\frac{1}{3}(1-x^4))\,dx \\
&= 2\int_0^1 \frac{2}{3}(1-x^4)^2\,dx = \frac{4}{3}\int_0^1 (1-2x^4+x^8)\,dx = \frac{4}{3}(1-\frac{2}{5}+\frac{1}{9}) = \underline{\underline{\frac{128}{135}}}.
\end{aligned}
$$

   b. Ett exempel på en MATLAB-kod:

```
x=linspace(-1,1,50);
[X,Y]=meshgrid(x);
Y=sqrt(1-X.^4).*Y;
Z1=X.^2;
Z2=sqrt(1-Y.^2);
mesh(X,Y,Z1)
hold on
mesh(X,Y,Z2)
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z');
```