Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell Matematisk analys F, del B** den 24/8 2005, kl. 14.00–18.00.

Hjälpmedel: "Användarhandledning för MATLAB" av Pärt-Enander–Sjöberg.
Telefon:
För godkänt krävs minst 24 poäng.
Lösningar anslås i Matematiskt Centrum efter tentamen.
Resultatet anslås i Matematiskt Centrum senast tre veckor efter tentamen.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Låt f vara en C^1-funktion på $\mathbb{R}^2$. Visa att funktionen $u(x,y,z) = \frac{1}{z} f(\frac{yz}{x^2}, \frac{xz}{y^2})$ satisfierar differentialekvationen
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} + u = 0. \qquad \text{(8p)}$$

2. Låt γ vara den positivt orienterade randen till fyrhörningen med hörn i $(0,0)$, $(2,1)$, $(3,3)$ och $(1,2)$. Beräkna $\int_\gamma e^{2x-y} dx + xy\, dy$. (8p)

3. Låt P vara en punkt i första oktanten på ytan $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$. Tangentplanet i P till ytan skär koordinataxlarna i punkterna A, B och C. Dessa punkter tillsammans med origo bildar hörn i en tetraeder. Bestäm den punkt P som minimerar volymen av denna tetraeder. (8p)

4. a. Beräkna arean av ytan $\mathbf{r} = (u^2, v^2, \sqrt{2}uv)$, $u^2 + v^2 \leq 1$, $u \geq 0$, $v \geq 0$. (8p)

   b. Skriv en MATLAB-kod för att rita ytan. (4p)

5. Låt Y vara ytan $z = 1 - 2x^2 - y^2$, $z \geq 0$. Beräkna $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$ (normalriktning uppåt), då $\mathbf{F} = (xy,\, y^2 + z,\, z^2 - x^2)$. (8p)

6. Visa att under lämpliga förutsättningar på en funktion $f(x,y)$ gäller att $f''_{xy} = f''_{yx}$. (8p)

7. Visa att om kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen i en sammanhängande öppen mängd Ω, så är $\mathbf{F}$ ett potentialfält i Ω. (8p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 24/8 2005

1. $f(s,t)$ är en C^1-funktion. För $u(x,y,z) = \frac{1}{z} f(\frac{yz}{x^2}, \frac{xz}{y^2})$ är

$$\begin{aligned}
u'_x &= \frac{1}{z}(f'_s \cdot \frac{-2yz}{x^3} + f'_t \cdot \frac{z}{y^2}) = -\frac{2y}{x^3} f'_s + \frac{1}{y^2} f'_t, \\
u'_y &= \frac{1}{z}(f'_s \cdot \frac{z}{x^2} + f'_t \cdot \frac{-2xz}{y^3}) = \frac{1}{x^2} f'_s - \frac{2x}{y^3} f'_t, \\
u'_z &= \frac{1}{z}(f'_s \cdot \frac{y}{x^2} + f'_t \cdot \frac{x}{y^2}) - \frac{1}{z^2} f = \frac{y}{zx^2} f'_s + \frac{x}{zy^2} f'_t - \frac{1}{z^2} f.
\end{aligned}$$

Alltså är

$$xu'_x + yu'_y + zu'_z + u = -\frac{2y}{x^2} f'_s + \frac{x}{y^2} f'_t + \frac{y}{x^2} f'_s - \frac{2x}{y^2} f'_t + \frac{y}{x^2} f'_s + \frac{x}{y^2} f'_t - \frac{1}{z} f + \frac{1}{z} f = 0.$$

---

2. Om D är området innanför γ ger Greens formel

$$\int_\gamma e^{2x-y} dx + xy\, dy = \iint_D (y - e^{2x-y}(-1))\, dxdy.$$

Fyrhörningens sidor har ekvationerna $2y - x = 0$, $2x - y = 3$, $2y - x = 3$ och $2x - y = 0$. Gör därför variabelbytet $u = 2x - y$, $v = 2y - x$. D motsvaras av $D' = \{(u,v) : 0 \le u \le 3,\ 0 \le v \le 3\}$, och vi har

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3, \qquad dxdy = \frac{1}{3} dudv.$$

Vidare är $y = \frac{1}{3}(u + 2v)$, och

$$\begin{aligned}
\int_\gamma e^{2x-y} dx + xy\, dy &= \iint_{D'} (\frac{1}{3}(u+2v) + e^u)\frac{1}{3} dudv = \frac{1}{3}\int_0^3 \int_0^3 (\frac{1}{3}u + e^u + \frac{2}{3}v) dudv \\
&= \frac{1}{3}\int_0^3 [(\frac{1}{3}u + e^u)\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 9] du = \left[\frac{1}{6}u^2 + e^u + u\right]_0^3 = \underline{e^3 + \frac{7}{2}}.
\end{aligned}$$

---

3. Ytan är $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$. Vi har $\nabla g = (2x, 2y, 8z)$. Tangentplanet i punkten (x_0, y_0, z_0), $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, $z_0 > 0$, på ytan har normalvektorn $(x_0, y_0, 4z_0)$, och alltså är planets ekvation

$$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + 4z_0(z - z_0) = 0,$$

dvs.

$$x_0 x + y_0 y + 4z_0 z = x_0^2 + y_0^2 + 4z_0^2 = 1.$$

$y = z = 0$ ger $x = \frac{1}{x_0}$, $x = z = 0$ ger $y = \frac{1}{y_0}$, $x = y = 0$ ger $z = \frac{1}{4z_0}$. Tetraederns volym blir då $V = \frac{1}{6}\frac{1}{x_0}\frac{1}{y_0}\frac{1}{4z_0}$. Slopa index 0, och maximera $f(x,y,z) = xyz$ under bivillkoret $g(x,y,z) = 1$. Eftersom $\nabla g \neq \mathbf{0}$, gäller att då maximum antas finns ett tal λ så att $\nabla f = \lambda \nabla g$, dvs.

$$\begin{cases} yz = 2\lambda x, \\ xz = 2\lambda y, \\ xy = 8\lambda z. \end{cases}$$

Då är $xyz/(2\lambda) = x^2 = y^2 = 4z^2$. Vidare är $x^2 + y^2 + 4z^2 = 3x^2 = 1$, så att $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $z = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Den minsta volymen fås alltså i punkten $P = \underline{(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}})}$, och minimum av V blir $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

---

4. $\mathbf{r} = (u^2, v^2, \sqrt{2}uv)$, $(u,v) \in D = \{(u,v) : u^2+v^2 \le 1, u \ge 0,\ v \ge 0\}$. $\mathbf{r}'_u = (2u, 0, \sqrt{2}v)$, $\mathbf{r}'_v = (0, 2v, \sqrt{2}u)$. En normalvektor är

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 2u & 0 & \sqrt{2}v \\ 0 & 2v & \sqrt{2}u \end{vmatrix} = (-2\sqrt{2}v^2, -2\sqrt{2}u^2, 4uv) = 2\sqrt{2}(-v^2, -u^2, \sqrt{2}uv),$$

och ytelementet är $dS = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|dudv$, där

$$|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| = 2\sqrt{2}\sqrt{v^4+u^4+2u^2v^2} = 2\sqrt{2}(u^2+v^2).$$

a. Arean är $\iint\limits_Y dS = \iint_D 2\sqrt{2}(u^2+v^2)dudv = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^2 r\,drd\varphi = 2\sqrt{2}\frac{\pi}{2}\int_0^1 r^3\,dr = \underline{\frac{\pi\sqrt{2}}{4}}$.

b. Exempel på en MATLAB-kod:

```
[r,fi]=meshgrid(0:0.05:1,0:pi/40:pi/2);
u=r.*cos(fi); v=r.*sin(fi);
x=u.^2; y=v.^2; z=sqrt(2)*u.*v;
mesh(x,y,z)
```

---

5. $Y : z = 1 - 2x^2 - y^2$, $z \ge 0$. Lägg till ”botten” $Y_1 : 2x^2 + y^2 \le 1$, $z = 0$, med normalriktning nedåt, så att $Y + Y_1$ blir rand till en kropp K. Gauss sats ger

$$\begin{aligned}
\iint_{Y+Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \iiint_K \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = \iiint_K (y+2y+2z)\,dxdydz \\
&= \iint_{2x^2+y^2\le 1} \left[3yz+z^2\right]_{z=0}^{1-2x^2-y^2} dxdy \\
&= \iint_{2x^2+y^2\le 1} [3y(1-2x^2-y^2)+(1-2x^2-y^2)^2]\,dxdy \\
&= [x = \frac{1}{\sqrt{2}}r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ dxdy = \frac{1}{\sqrt{2}}r\,drd\varphi] \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 [3r\sin\varphi(1-r^2)+(1-r^2)^2]\frac{1}{\sqrt{2}}r\,drd\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}\int_0^1 (1-r^2)^2 r\,dr \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{2}}\left[-\frac{1}{6}(1-r^2)^3\right]_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

På Y_1 är $z = 0$, $\mathbf{N} = (0,0,-1)$, $dS = dxdy$, så att

$$\begin{aligned}
\iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \iint_{2x^2+y^2\le 1} x^2\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{2}r^2\cos^2\varphi\,\frac{1}{\sqrt{2}}r\,drd\varphi \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 r^3\,dr\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{4}\pi = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Alltså är $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8\sqrt{2}} = \underline{\frac{5\pi}{24\sqrt{2}}}$.
