


Tentamensskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2007-08-28, kl. 14.00-18.00 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa

Telefon: Bernhard Behrens, tel. 0768-681630

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

1. Låt $F(x, y) = 8x^3 + 6xy + y^3$.
 - a) Bestäm alla stationära punkter till F och deras karaktär. (6p)
 - b) Visa att nivåkurvan $F(x, y) = 1$ lokalt kring punkten $(1, -1)$ är en funktionskurva $y = f(x)$ och bestäm $f'(1)$. (3p)

 2. Låt $\mathbf{F} = (\cos(x)\cos(y), -\sin(x)\sin(y))$
och $C: \mathbf{r} = (-\cos(t)\cosh(t), \sin(t)\sinh(t)), 0 \xrightarrow{t} \pi$.
 - a) Är \mathbf{F} konservativt i \mathbb{R}^2 ? Om ja, bestäm en potential till \mathbf{F} i \mathbb{R}^2 . (4p)
 - b) Beräkna $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. (3p)
 - c) Beräkna arean av området mellan C och x -axeln. (4p)
- 
3. Låt $f(x, y) = 1 - |xy|$ och $D: x^2 + y^2 \leq 1$.
 - a) Beräkna volymen av kroppen $K = \{(x, y, z): (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$. (5p)
 - b) Beräkna arean av ytan $Y: z = f(x, y), (x, y) \in D$. (5p)
 - c) Är f differentierbar i origo? (5p)

 4. Låt $\mathbf{F}(x, y, z) = (\cos x, x^2 y \cos z + (y + z) \sin x, -x^2 \sin z)$ vara hastighetsvektorn för en stationär strömning av en inkompressibel vätska.
 - a) Visa att \mathbf{F} är källfritt (2p) och bestäm en vektorpotential \mathbf{A} för \mathbf{F} (5p)
(ledn.: ansätt $\mathbf{A}(x, y, z) = (p(x, y, z), 0, q(x, y, z))$). (7p)
 - b) Bestäm volymen av den vätskemängd som per tidsenhet strömmar nedåt genom ytan $Y: z = (\pi - \sqrt{x^2 + y^2})e^{-\frac{1}{4}\cos\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{\pi}{2}$. (6p)

 5. a) Visa att om $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är deriverbar i en punkt \mathbf{a} och antar i \mathbf{a} ett extremvärde så är \mathbf{a} en stationär punkt. (5p)
 - b) Formulera och bevisa en sats om derivering av en sammansatt funktion $f(x(t), y(t))$. (7p)

Tentamen i flervariabelanalys för F1 (mve035), 07-08-28

uppg. 1

$$F(x, y) = 8x^3 + 6xy + y^3.$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \left. \begin{aligned} F'_x &= 24x^2 + 6y = 0 \\ F'_y &= 6x + 3y^2 = 0 \end{aligned} \right\} \implies (-6xy =) 24x^3 = 3y^3 \\ \implies 8x^3 - y^3 = (2x - y) \underbrace{(4x^2 + 2xy + y^2)}_{>0} = 0 \iff 2x = y \\ \xrightarrow{F'_x=0} 4x^2 + 2x = 0 \implies x = 0 \text{ eller } x = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

det ger de stationära punkterna $(0, 0)$ och $(-\frac{1}{2}, -1)$. Deras typ fås med den kvadratiska formen $Q(h, k) = F''_{xx}(a, b)h^2 + 2F''_{xy}(a, b)hk + F''_{yy}(a, b)k^2$:

	$(0, 0)$	$(-\frac{1}{2}, -1)$
$F''_{xx} = 48x$	0	-24
$F''_{xy} = 6$	6	6
$F''_{yy} = 6y$	0	-6

, det ger för $(0, 0)$: $Q(h, k) = 12hk$ som är

indefinit, $(0, 0)$ är alltså en sadelpunkt (det inses även direkt!), för $(\frac{1}{2}, 1)$ fås $Q(h, k) = -24h^2 + 12hk - 6k^2 = -6((k - h)^2 + 3h^2)$ som är negativt definit, $(-\frac{1}{2}, -1)$ är alltså en str. lokal maximipunkt.

- b) $F(1, -1) = 1$ (punkten $(1, -1)$ ligger på nivåkurvan $F(x, y) = 1$), F är C^1 och $F'_y(1, -1) = 9 \neq 0$, implicita funktionsatsen ger då att

nivåkurvan $F(x, y) = 1$ lokalt kring $(1, -1)$ C^1 -kurva $y = f(x)$, kedjeregeln ger $\frac{d}{dx}F(x, f(x)) = F'_x(x, f(x)) \cdot 1 + F'_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = \frac{d}{dx}1 = 0$

lokalt kring $(1, -1)$, alltså $f'(1) = -\frac{F'_x(1, -1)}{F'_y(1, -1)} = -\frac{18}{9} = -2$.

svar: a) $(0, 0)$: sadelpunkt, $(-\frac{1}{2}, -1)$: lok. maximipunkt **b)** $f'(1) = -2$

uppg. 2

$$\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = (\cos x \cos y, -\sin x \sin y), \mathbf{F} \text{ är } C^1.$$

- a) $Q'_x = -\cos x \sin y = P'_y \stackrel{\mathbb{R}^2 \text{ bägv. shgd.}}{\implies} \mathbf{F}$ är konservativt i \mathbb{R}^2 . Alltså finns en potential Φ : $\Phi'_x = \cos x \cos y \implies \Phi = \sin x \cos y + g(y) \implies \Phi'_y = -\sin x \sin y + g'(y) \stackrel{!}{=} -\sin x \sin y \implies g'(y) = 0$, alltså är $\Phi(x, y) = \sin x \cos y$ en potential.

- b) C är en kurva från $\mathbf{r}(0) = (-1, 0)$ till $\mathbf{r}(\pi) = (\cosh \pi, 0)$, alltså är med

potentialen från a) $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \Phi(\cosh \pi, 0) - \Phi(-1, 0) =$

$= \sin(\cosh \pi) + \sin 1.$



c) Arian av D = området mellan x -axeln och kurvan

$C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (-\cos t \cosh t, \sin t \sinh t), 0 \xrightarrow{t} \pi$ är

$m(D) = \iint_D dx dy \stackrel{\text{Green}}{=} \frac{1}{2} \int_{\partial D} -y dx + x dy = [\partial D \text{ moturs genoml.}] =$

$[\partial D = C + C_1 \text{ där } C_1 = \begin{cases} x = t, dx = dt \\ y = 0, dy = 0 dt \end{cases}, -1 \xrightarrow{t} \cosh \pi]$

$\frac{1}{2} \int_{\pi}^0 (-\sin t \sinh t (\sin t \cosh t - \cos t \sinh t) - \cos t \cosh t (\cos t \sinh t + \sin t \cosh t)) dt =$

[trigonometriska resp. hyperboliska ettan] $= 0 + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\sinh t \cosh t + \sin t \cos t) dt =$

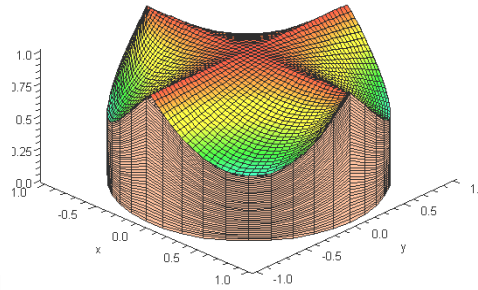
$= \frac{1}{4} [\sinh^2 t + \sin^2 t]_0^{\pi} = \frac{\sinh^2 \pi}{4}.$ Alternativt:

$m(D) = \int_{-1}^{\cosh \pi} y(x) dx$ med subst. $x = -\cos t \cosh t, y = \sin t \sinh t \dots$

svar:

a) \mathbf{F} är konservativt med potential $\sin x \cos y$ b) $\sin(\cosh \pi) + \sin 1$ c) $\frac{\sinh^2 \pi}{4}$

uppg. 3



$f(x, y) = 1 - |xy|, D : x^2 + y^2 \leq 1.$

Sätt $D^+ : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ och beakta symmetrin!

a) Volymen av kroppen $K : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)$ är [$f(x, y) > 0$ på D]

$4 \iint_{D^+} f(x, y) dx dy = 4 \iint_{D^+} (1 - xy) dx dy = [\text{pol. koord.}] =$

$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (1 - r^2 \cos \varphi \sin \varphi) r dr d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cos \varphi \sin \varphi) d\varphi =$

$= [2\varphi - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - \frac{1}{2}.$

b) Arian av ytan $Y : z = f(x, y), (x, y) \in D$ är

$$\begin{aligned}
& 4 \iint_{D^+} \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy = \\
& = 4 \iint_{D^+} \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy = [\text{pol. koord.}] = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sqrt{1 + r^2} r dr d\varphi = \\
& = 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{1}{3} (1 + r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1).
\end{aligned}$$

c) Vi kollar först om de partiella derivatorna existerar i origo:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} &= \frac{1-1}{x} = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f'_x(0,0) \\
\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} &= \frac{1-1}{y} = 0 \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 = f'_y(0,0)
\end{aligned} \right\} f \text{ är alltså partiellt deriverbar}$$

i origo; då kollar vi om f är differentierbar i origo, dvs. om det relativa felet

$$\rho(x, y) = \frac{f(x, y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1 - |xy| - 1 - 0 - 0}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

går mot 0 då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \rho(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \rho(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-r^2 \cos \varphi \sin \varphi}{r} = 0, \text{ det ger att } f \text{ är differentierbar i origo.}$$

svar: a) $\pi - \frac{1}{2}$ b) $\frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1)$ c) ja
--

uppg. 4

$\mathbb{F}(x, y, z) = (\cos x, x^2 y \cos z + (y + z) \sin x, -x^2 \sin z)$, \mathbb{F} är C^1 .

a) $\text{div} \mathbb{F} = \frac{\partial}{\partial x} \cos x + \frac{\partial}{\partial y} (x^2 y \cos z + (y + z) \sin x) + \frac{\partial}{\partial z} (-x^2 \sin z) =$
 $= -\sin x + x^2 \cos z + \sin x - x^2 \cos z = 0$, \mathbb{F} är alltså källfritt och har därmed
en vektorpotential \mathbb{A} , dvs. $\mathbb{F} = \text{rot} \mathbb{A}$; med $\mathbb{A} = (p, 0, q)$ skall
 $(\cos x, x^2 y \cos z + (y + z) \sin x, -x^2 \sin z) = (q'_y, p'_z - q'_x, -p'_y)$:

$$\begin{cases}
q'_y = \cos x \implies q = y \cos z + h(x, z) \\
p'_z - q'_x = x^2 y \cos z + y \sin x + z \sin x \\
-p'_y = -x^2 \sin z \implies p = x^2 y \sin z + g(x, z)
\end{cases}$$

$\implies p'_z - q'_x = x^2 y \cos z + g'_z + y \sin z - h'_x \stackrel{!}{=} x^2 y \cos z + y \sin x + z \sin x$
 $\implies g'_z - h'_x = z \sin x$, det är uppfyllt om vi t. ex. väljer
 $g \equiv 0$ och $h(x, z) = z \cos x$, det ger $\mathbb{A} = (x^2 y \sin z, 0, (y + z) \cos x)$.

b) Eftersom $\text{div} \mathbb{F} = 0$ vill vi helst avända Gauss: Betrakta kroppen

$$K = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{4}, \frac{\pi}{2} \leq z \leq f(x, y) \right\} \text{ där}$$

$$f(x, y) = \left(\pi - \sqrt{x^2 + y^2} \right) e^{-\frac{1}{4} \cos \sqrt{x^2 + y^2}}: \text{ Flödet in i } K \text{ är } (\mathbf{n} = \text{normalen inåt } K) \iint_{\partial K} \mathbb{F} \bullet \mathbf{n} dS = \iint_{Y \cup D} \mathbb{F} \bullet \mathbf{n} dS \stackrel{\text{Gauss}}{=} - \iiint_K \text{div} \mathbb{F} dx dy dz = 0 \text{ där}$$

$$D = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{4}, z = \frac{\pi}{2} \right\}, \text{ flödet av } \mathbb{F} \text{ nedåt genom } Y \text{ är alltså} \\
\iint_Y \mathbb{F} \bullet \mathbf{n} dS = - \iint_{D'} \mathbb{F} \bullet (0, 0, 1) dx dy = [\text{med } D' = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{4} \right\}] \\
= - \iint_{D'} (\cos x, x^2 y \cos \frac{\pi}{2} + (y + \frac{\pi}{2}) \sin x, -x^2 \sin \frac{\pi}{2}) \bullet (0, 0, 1) dx dy =$$

$$= \iint_{D'} x^2 dx dy = [\text{pol. koord.}] = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 r \varphi dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \frac{1+\cos(2\varphi)}{2} dr d\varphi =$$

$$= \pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^5}{64}.$$

Alternativt kan flödet beräknas med **a)**: $\iint_Y \mathbb{F} \bullet \mathbf{n} dS = \iint_Y \text{rot} \mathbb{A} \bullet \mathbf{n} dS \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial Y} \mathbb{A} \bullet d\mathbf{r}$ där $\partial Y : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \left(\frac{\pi}{2} \cos t, \frac{\pi}{2} \sin t, \frac{\pi}{2} \right), 2\pi \xrightarrow{t} 0$,

flödet är alltså $\int_C \mathbb{A} \bullet d\mathbf{r} =$

$$= \int_{2\pi}^0 \left(\left(\frac{\pi}{2} \cos t \right)^2 \frac{\pi}{2} \sin t \sin \frac{\pi}{2}, 0, \left(\frac{\pi}{2} \sin t + \frac{\pi}{2} \right) \cos \frac{\pi}{2} \right) \bullet \left(-\frac{\pi}{2} \sin t, \frac{\pi}{2} \cos t, 0 \right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 \cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{\pi^4}{64} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt = \frac{\pi^4}{64} \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(4t)}{2} dt = \frac{\pi^5}{64}.$$

svar: a) $\mathbb{A} = (x^2 y \sin z, 0, (y+z) \cos x)$ b) $\frac{\pi^5}{64}$

Ytan ser ut så här:

