

Tentamensskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2008-01-17, kl. 8.30-12.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa

Telefon: Jonas Hartwig, tel. 0762-721860

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

- =====
1. Låt $f(x, y) = xy + e^{x^4 - y^3} \sin(x^2 + y^2)$.
 - a) Bestäm Taylorpolynomet av ordningen 5 i origo till f . (4p)
 - b) Visa att origo är en stationär punkt till f och bestäm dess typ. (4p)
 - c) Visa att ekvationen $z = f(x, y)$ lokalt kring punkten $(1, 0, e \sin 1)$ definierar y som en differentierbar funktion av (x, z) . (2p)

 2. Betrakta kraftfältet $\mathbf{F}(x, y) = \left(x^2 + y^2 + x \ln(1 + y^2), \frac{x^2 y}{1 + y^2} \right)$ och kurvorna $C_1: y = \frac{1}{2}x^2 - 2, -2 \xrightarrow{x} 2$ och $C_2: y = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right), 2 \xrightarrow{x} -2$.
 - a) Är \mathbf{F} konservativt i \mathbb{R}^2 ? (3p)
 - b) Beräkna det arbete som \mathbf{F} uträttar då en partikel förflyttas längs kurvan $C = C_1 + C_2$. (6p)

 3. Lös differentialekvationen $(x - y + xy^2 z^2) dx + (y - x + x^2 yz^2) dy + (z + x^2 y^2 z) dz = 0$. (7p)

 4. Vilka värden kan $x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}$ anta? (7p)

 5. Låt $f(x, y) = -\ln\sqrt{x^2 + y^2}$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$.
 - a) Beräkna volymen av kroppen $K = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$. (6p)
 - b) Beräkna arean av ytan $Y = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$. (6p)

 6. a) Vad menas med att ett fält $\mathbf{F} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ är differentierbar i en punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$? (3p)
 b) Formulera Stokes sats. (3p)
 c) Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara differentierbar i en punkt \mathbf{a} med $\text{grad } f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$. Visa att $\text{grad } f(\mathbf{a})$ är den riktning i vilken f växer snabbast då man rör sig från punkten \mathbf{a} . (5p)
 d) Visa att ett C^1 -fält i \mathbb{R}^3 som har en vektorpotential i \mathbb{R}^3 är källfritt i \mathbb{R}^3 . (4p)

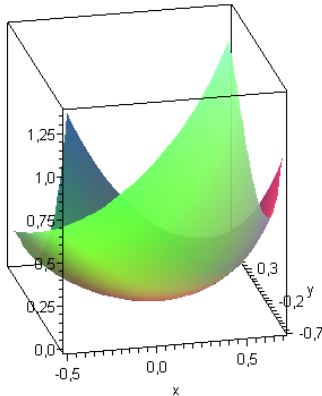
Tentamen i flervariabelanalys för F1 (mve035), 08-01-17

uppg. 1

- a) $f(x, y) = xy + e^{x^4 - y^3} \sin(x^2 + y^2)$;

$$\left. \begin{aligned} e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} \dots \implies_{t=x^4 - y^3} e^{x^4 - y^3} = 1 + x^4 - y^3 + \dots \\ \sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \dots \implies_{t=x^2 + y^2} \sin(x^2 + y^2) = x^2 + y^2 + \dots \end{aligned} \right\} \implies$$

$$f(x, y) = xy + (1 + x^4 - y^3 + \dots)(x^2 + y^2 + \dots) = \underline{xy + x^2 + y^2 - x^2y^3 - y^5 \dots}$$
(vi tog bara med termer t.o.m. ordningen 5).
- b) Taylorpolynomets entydighet visar att $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, dvs. att origo är en stationär punkt och att $Q(h, k) = f''_{xx}(0, 0) + 2f''_{xy}(0, 0) + f''_{yy}(0, 0) = h^2 + hk + k^2$. Den kvadratiske formen $Q(h, k) = (h + \frac{k}{2})^2 + \frac{3}{4}k^2$ är positivt definit, det ger att origo är en sträng lokal minimipunkt.
- c) För $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ gäller: punkten $(1, 0, e \sin 1)$ ligger på nivåytan $F(x, y, z) \equiv 0$ och $F'_y(1, 0, e \sin 1) = -f'_y(1, 0) = -1 \neq 0$ [$f'_y(x, y) = x + e^{x^4 - y^3} (2y \cos(x^2 + y^2) - 3y^2 \sin(x^2 + y^2))$], implicita funktionsssatsen ger då påståendet. Ytan $z = f(x, y)$ nära origo:

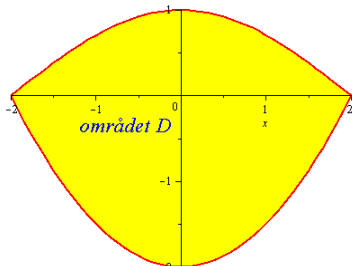


svar:a) $x^2 + xy + y^2 - x^2y^3 - y^5$ **b)** str.lok.minimipunkt

uppg. 2

- $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = (x^2 + y^2 + x \ln(1 + y^2), \frac{x^2 y}{1 + y^2})$, \mathbf{F} är C^1 .
- a) $P'_y(x, y) = 2y + \frac{2xy}{1 + y^2} \neq \frac{2xy}{1 + y^2} = Q'_x(x, y) \implies \mathbf{F}$ är inte konservativt.
- b) $C_1 : y = \frac{x^2}{2} - 2, -2 \xrightarrow{x} 2, C_2 : y = \cos(\frac{\pi x}{4}), 2 \xrightarrow{x} -2,$

kurvan $C = C_1 + C_2$ är en enkel, sluten kurva = den positivt orienterade randen ∂D till (det enkelt sammanhängande) området D , se figur:



för att beräkna arbetet av \mathbf{F} längs C kan vi alltså använda *Green*:

$$\begin{aligned} \int_C P dx + Q dy &= \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy = \iint_D (-2y) dx dy = \\ &= \int_{-2}^2 \left(\int_{\frac{x^2}{2}-2}^{\cos \frac{\pi x}{4}} (-2y) dy \right) dx = [\text{jämn funktion, symmetriskt intervall}] = \\ &= 2 \int_0^2 \left([-y^2]_{\frac{x^2}{2}-2}^{\cos \frac{\pi x}{4}} \right) dx = 2 \int_0^2 \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 + 4 - \frac{1+\cos \frac{\pi x}{2}}{2} \right) dx = \\ &= 2 \left[\frac{x^5}{20} - \frac{2x^3}{3} + \left(4 - \frac{1}{2}\right)x - \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\pi} \right]_0^2 = 2 \left(\frac{8}{5} - \frac{16}{3} + 7 \right) = 2 \left(\frac{8}{5} + \frac{5}{3} \right) = \frac{2 \cdot 49}{15}. \end{aligned}$$

svar: a) nej b) $\frac{98}{15}$

uppg. 3

$\mathbf{F} = (P, Q, R) = (x - y + xy^2z^2, y - x + x^2yz^2, z + x^2y^2z)$ är exakt ty
 $\text{rot} \mathbf{F} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (0, 0, 0)$, \mathbf{F} har alltså en potential U ,
dvs. $\mathbf{F} = \text{grad} U$ och då löser nivåytorna $U(x, y, z) = \text{const}$ det givna problemet
 $dU = U'_x dx + U'_y dy + U'_z dz = 0$:

$$\left. \begin{aligned} U'_z(x, y, z) = z + x^2y^2z &\implies U(x, y, z) = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}x^2y^2z^2 + f(x, y) \implies \\ U'_y(x, y, z) = x^2yz^2 + f'_y(x, y) &\stackrel{!}{=} y - x + x^2yz^2 \implies f'_y(x, y) = y - x \implies \\ f(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - xy + g(x) &\implies U'_x(x, y, z) = xy^2z^2 - y + g'(x) \stackrel{!}{=} \\ &\stackrel{!}{=} x - y + xy^2z^2 \implies g'(x) = x \implies g(x) = \frac{1}{2}x^2 + c \end{aligned} \right\}$$

$$\implies U(x, y, z) = \frac{1}{2}(z^2 + x^2y^2z^2 + y^2 - 2xy + x^2).$$

svar: $(x - y)^2 + z^2 + x^2y^2z^2 = c$

uppg. 4

Vi sätter $f(x, y) = x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}$, f :s definitionsmängd är
 $D_f = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$, D_f är kompakt, f är kontinuerlig, antar alltså
på D_f ett minsta värde m och ett största värde M och f :s värdemängd är då
 $V_f = [m, M]$ ty D_f är bägvis sammanhängande (s.o.m.v.).

- I. Inre punkter (f är partiellt deriverbar i det inre av D , inre extrempunkter är alltså stationära):

$$\begin{cases} f'_x = \sqrt{1-y^2} - \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \\ f'_y = \sqrt{1-x^2} - \frac{xy}{\sqrt{1-y^2}} = 0 \end{cases} \iff \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = xy \quad (> 0)$$

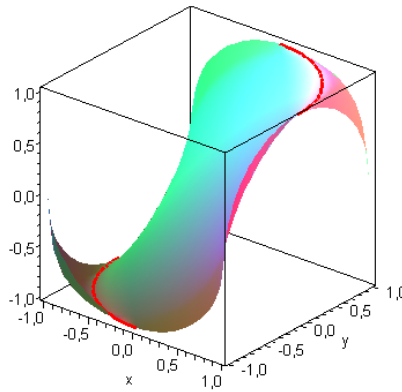
$\iff 1+x^2y^2-y^2-x^2 = x^2y^2$, alla punkter på cirkeln $x^2+y^2=1$ i första kvadranten ($xy > 0$) är alltså stationära.

I dessa punkter är $f(x, y) = \begin{cases} f(x, \sqrt{1-x^2}) = x^2 + 1 - x^2 \text{ då } x > 0 \\ f(x, -\sqrt{1-x^2}) = -x^2 - 1 + x^2 \text{ då } x < 0 \end{cases}$, minsta/största värdet som f antar i dessa punkter är alltså ∓ 1 .

II. Randpunkter:

$$\left. \begin{array}{l} x = \pm 1 : f(\pm 1, y) = \pm \sqrt{1-y^2} \\ y = \pm 1 : f(x, \pm 1) = \pm \sqrt{1-x^2} \end{array} \right\} : \text{minsta/största värde är } \mp 1. \text{ Alltså}$$

svar: $V_f = [-1, 1]$ så ser ytan $z = f(x, y)$ ut:



uppg. 5

$f(x, y) = -\ln \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ för $(x, y) \in D = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$.

a) Kroppen $K = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ har volymen

$$\begin{aligned} m(K) &= \iint_D (-\ln \sqrt{x^2 + y^2}) \, dx dy = [\text{generaliserad i 0}] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} (-\ln \sqrt{x^2 + y^2}) \, dx dy \text{ där } D_n = \{(x, y) : \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}: \end{aligned}$$

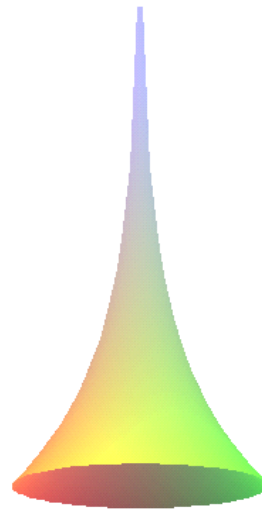
$$I_n = [\text{polära koordinater}] = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{n}}^1 (-\ln r) r \, dr \, d\varphi = [\text{part. int.}] =$$

$$= 2\pi \left[-\frac{r^2}{2} \ln r + \frac{r^2}{4} \right]_{\frac{1}{n}}^1 \implies m(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 2\pi \left(\frac{1}{4} - 0 \right) \text{ ty } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0.$$

b) Ytan $Y = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$ har arean

$$m(Y) = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} \, dx dy = [\text{generaliserad i 0}] =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2} dx dy, D_n \text{ som ovan:} \\
A_n &= [\text{polära koordinater}] = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{n}}^1 \sqrt{1 + \frac{1}{r^2}} r dr d\varphi = 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^1 \sqrt{r^2 + 1} dr = \\
[\text{part. int.}] &= 2\pi \left[\frac{1}{2} (r\sqrt{r^2 + 1} + \ln(r + \sqrt{r^2 + 1})) \right]_{\frac{1}{n}}^1 \\
[\text{alternativt fås } \int \sqrt{r^2 + 1} dr &= [r = \sinh t] = \int \cosh^2 t dt = \int \frac{1 + \cosh 2t}{2} dt = \\
&= \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sinh 2t = \frac{1}{2} (t + \sinh t \cosh t) = \frac{1}{2} (\ln(r + \sqrt{r^2 + 1}) + r\sqrt{r^2 + 1})], \\
\text{alltså } \underline{m(Y)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \underline{\pi (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))} \text{ ty } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.
\end{aligned}$$



svar: a) $\frac{\pi}{2}$ **b)** $\pi (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$