Tentamensskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2008-03-14, kl. 14.00-18.00 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Jacob Sznajdman, tel. 0762-721860
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

==

1. Låt $F(x,y,z) = xyz - \sin(x^2 - z^2) - \cos(y^2 - z^2)$.

a) Ange en ekvation för tangentplanet till nivåytan $F(x,y,z) = 0$ i punkten $(1,1,1)$. (4p)

b) Visa att nivåytan $F(x,y,z) = 0$ lokalt kring punkten $(1,1,1)$ är en funktionsyta $z = f(x,y)$ och bestäm $f_x'(1,1)$. (4p)

2. Beräkna arean av ytan $Y: z = \cosh\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right),\ |y| \le x \le \sqrt{2}\ln 2$. (7p)

3. Bestäm de lägsta och de högsta punkterna på ytan $Y: z = x^3 + y^2,\ 3x^2 + 2y^2 \le 4$ (dvs. punkterna $(x,y,z) \in Y$ med minsta resp. största z-koordinat). (7p)

4. Låt $\mathbb{F} = (yz, xy, x+y+z): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

a) Är $\mathbb{F}$ bijektivt lokalt i origo, resp. bijektiv lokalt i $(1,1,1)$? (2p +2p) (4p)

b) Har $\mathbb{F}$ en potential i $\mathbb{R}^3$? Har $\mathbb{F}$ en vektorpotential i $\mathbb{R}^3$? (2p +2p) (4p)

c) Beräkna $\int_C \mathbb{F} \bullet d\boldsymbol{r}$ då C är skärningskurvan mellan ytan $Y: z = x^3 + y^2$ och cylindern $3x^2 + 2y^2 = 4$ genomlöpt moturs sett uppifrån. (ledn.: använd Stokes sats) (7p)

5. Låt K vara pyramiden med hörnpunkterna $\pm(a,0,0), \pm(0,a,0)$ och $(0,0,a)$, $a > 0$ och $\boldsymbol{v} = \left(e^{x\sin z} - xye^{y\sin z}\cos z,\ 3xy^2z^2 - ye^{x\sin z}\sin z,\ (1-2xy)z^3 + e^{y\sin z}\right)$.
Beräkna flödet av strömningsfältet $\boldsymbol{v}$ uppåt genom pyramidens sneda sidor (dvs. genom ∂K utom botten, i positiva z-axelns riktning). (8p)

6. **a)** Definiera enkelt sammanhängande mängd i $\mathbb{R}^2$. (2p)

b) Visa att om $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ är differentierbar i $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m$ så är f kontinuerlig i $\boldsymbol{a}$. (5p)

c) Formulera och bevisa Greens sats. (8p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

SVAR

10-01-14: **1a)** ½ **b)** nej **c**) $-2-2\sinh 1$ **2)** $m(K)=260,\, m(Y)=140$ **3)** $\pi\sqrt{\pi}$ **4)** $\mathbb{V}$ är lokalt bijektivt i $(1,1,1)$, ej konservativt **b)** $\frac{\pi}{2}$
09-08-25: **1b)** $\frac{16\ln 2}{250}$ **2)** $yg\left(ye^{\frac{1}{x}}\right)$ **3)** $4\pi\sqrt{\pi}$ **4)** $\frac{\pi^5}{5}$ **5)** $\left[\frac{1}{3},1\right]$ **6a)** $\left(z+z^2,\, x-2z,\, 2xz-y\right)$ **b)** 0 **c)** $\frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$
09-03-12: **1a**) $2x+2y-z+1=0$ **b**) $(0,0)$, sadelpunkt **2)** $\frac{350\pi}{3}$ **3c**) $4xyz$ **e**) 1 **4)** $[-4,\, 4]$
09-01-14: **1)** $4x-y-z=8$ **2)** $\frac{\pi}{2}\left(\frac{7\sqrt{5}}{4}+\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$ **3a)** lokal minimipunkt, **b)** sadelpunkt **4a)** bijektivt lokalt i origo, ej konservativt **b)** $\frac{12\pi}{5}$ 4) $\ln\left(\cosh\left(\frac{1}{2\pi}\right)-\frac{1}{2\pi}\right)$ **6)** $2^{\frac{5}{6}}$
08-08-25: 1) $\mathbb{F}$ är konservativt, $div\mathbb{F}=2\left(\cosh(x+y)+\sinh(y-z)\right)+1$, ökar i $(1,1,1)$ mest i riktningen $(\sinh 2, \sinh 2+1, -1)$ **2a**) $\pi-2$ **b**) ja **3)** $\frac{3\left(e^4-e\right)}{8}$ **4)** $\left(2x^2-3y^2\right)e^{2x}$ **5a**) 0 **b)** $\frac{\sqrt{6}}{9}$
08-03-14: 1a) $x-y-3z+3=0$ **b)** $\frac{1}{3}$ **2)** $\frac{9}{8}$ **3)** lägst: $-\left(\frac{2}{\sqrt{3}},0,\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)$, högst: $\left(0,\pm\sqrt{2},2\right)$ **4a)** i origo: nej, i $(1,1,1)$: ja **b)** varken eller **c)** $\frac{-10\pi}{\sqrt{6}}$ **5)** $2a^2+\frac{a^5}{5}$