Matematik CTH&GU

<u>Tentamen i flervariabelanalys F1/TM (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2009-01-14, kl. 8.30-12.30 i V</u>

<u>Hjälpmedel</u>: Inga, ej heller räknedosa,

<u>Telefon</u>: Martin Berglund, tel. 0762 – 721860

<u>OBS</u>: Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

==

1. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $Y: x^2 + y^2 z + yz^2 = 4$ i punkten $(2,1,-1)$. (4p)

2. Beräkna arean av spiralrampen $Y: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t,\theta) = (t\cos(\theta), t\sin(\theta), \theta), \frac{1}{2} \le t \le 2, 0 \le \theta \le \pi$. (7p)

3. Visa att origo är en stationär punkt och bestäm dess karaktär till

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + \tan(xy)$ **b)** $g(x,y) = x^2 + y^2 + 2\tan(xy)$ (4p var) (8p)

4. Låt $\boldsymbol{v} = \left(x^3 + xe^{xy} - z,\, xy - ye^{xy} + y^3 + z,\, -xz + y + z^3\right): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

a) Är $\boldsymbol{v}$ bijektivt lokalt i origo? Är $\boldsymbol{v}$ konservativt i $\mathbb{R}^3$? (2p var) (4p)

b) Beräkna flödet av $\boldsymbol{v}$ ut ur sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (7p)

5. Beräkna det arbete som fältet $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(\frac{\sinh(x-y)-\cosh(x-y)}{\cosh(x-y)}, \frac{\cosh(x-y)-\sinh(x-y)}{\cosh(x-y)}\right)$ uträttar

då en partikel förflyttas längs spiralbågen $C: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\varphi) = \left(\frac{\cos(\varphi)}{\varphi}, \frac{\sin(\varphi)}{\varphi}\right), \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\varphi} 2\pi$. (7p)

6. Låt $Y: x^2 + y^2 z + yz^2 = 4$ (ytan i uppg. 1) och $K_r: x^2 + y^2 + z^2 \le r^2$.

Bestäm den största radien R så att $Y \cap K_r = \varnothing$ för alla $r < R$. (7p)

7. a) Vad menas med att en funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är differentierbar i en punkt (a,b)? (2p)

b) Formulera och bevisa en sats om derivering av en sammansatt funktion $f(x(t), y(t))$. (7p)

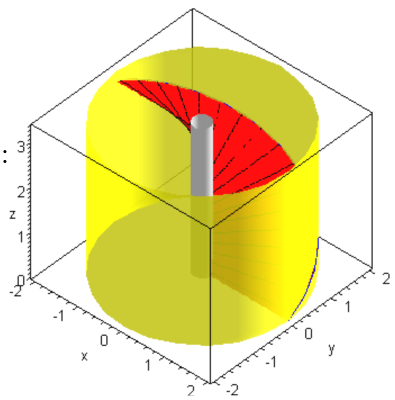
8. Visa att om $\boldsymbol{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är C^1 och virvelfritt i $\mathbb{R}^3$ så är kurvintegralen $\int_\gamma \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{r}$

oberoende av vägen i $\mathbb{R}^3$. (7p)

Betygsgränser:
24p – 35p ger betyget 3,
36p – 47p ger betyget 4,
48p eller mer ger betyget 5

BB

spiralrampen i uppg. 2:



SVAR

10-01-14: **1a)** ½ **b)** nej **c)** $-2-2\sinh 1$ **2)** $m(K)=260, m(Y)=140$ **3)** $\pi\sqrt{\pi}$ **4)** $\mathbb{V}$ är lokalt bijektivt i $(1,1,1)$, ej konservativt **b)** $\frac{\pi}{2}$
09-08-25: **1b)** $\frac{16\ln 2}{250}$ **2)** $yg\left(ye^{\frac{1}{x}}\right)$ **3)** $4\pi\sqrt{\pi}$ **4)** $\frac{\pi^5}{5}$ **5)** $\left[\frac{1}{3},1\right]$ **6a)** $\left(z+z^2,\ x-2z,\ 2xz-y\right)$ **b)** 0 **c)** $\frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$
09-03-12: **1a)** $2x+2y-z+1=0$ **b)** $(0,0)$, sadelpunkt **2)** $\frac{350\pi}{3}$ **3c)** $4xyz$ **e)** 1 **4)** $[-4,\ 4]$
09-01-14: **1)** $4x-y-z=8$ **2)** $\frac{\pi}{2}\left(\frac{7\sqrt{5}}{4}+\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$ **3a)** lokal minimipunkt, **b)** sadelpunkt **4a)** bijektivt lokalt i origo, ej konservativt **b)** $\frac{12\pi}{5}$ 4) $\ln\left(\cosh\left(\frac{1}{2\pi}\right)-\frac{1}{2\pi}\right)$ **6)** $2^{\frac{5}{6}}$
08-08-25: **1)** $\mathbb{F}$ är konservativt, $div\mathbb{F}=2(\cosh(x+y)+\sinh(y-z))+1$, ökar i $(1,1,1)$ mest i riktningen $(\sinh 2,\sinh 2+1,-1)$ **2a)** $\pi-2$ **b)** ja **3)** $\frac{3(e^4-e)}{8}$ **4)** $\left(2x^2-3y^2\right)e^{2x}$ **5a)** 0 **b)** $\frac{\sqrt{6}}{9}$
08-03-14: **1a)** $x-y-3z+3=0$ **b)** $\frac{1}{3}$ **2)** $\frac{9}{8}$ **3)** lägst: $-\left(\frac{2}{\sqrt{3}},0,\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)$, högst: $\left(0,\pm\sqrt{2},2\right)$ **4a)** i origo: nej, i $(1,1,1)$: ja **b)** varken eller **c)** $\frac{-10\pi}{\sqrt{6}}$ **5)** $2a^2+\frac{a^5}{5}$