Matematik CTH&GU

Tentamen i flervariabelanalys F/TM (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2010-01-14, kl. 8.30-12.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,
Telefon: Fredrik Lindgren, tel. 0703 – 088304
OBS: Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

==

1. Kraftfältet $\mathbb{F}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har potentialen $\Phi(x,y,z)=\cosh(x-y)+\sinh(y-z)+x-z$.

a) Visa att ekvipotentialytan $\Phi(x,y,z)=1$ lokalt i varje punkt (a,a,a) $(a\in\mathbb{R})$ är en C^1-funktionsyta $z=f(x,y)$ och beräkna $f_y'(a,a)$. (5p)

b) Är $\mathbb{F}$ ett rotationsfält, dvs. har $\mathbb{F}$ en vektorpotential, i $\mathbb{R}^3$? (3p)

c) Beräkna $\int_C \mathbb{F}\bullet d\boldsymbol{r}$ där C är kurvan $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=\left(\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right),\cos(\pi t),t\right), 0\xrightarrow{t}2$. (3p)

2. Låt $f(x,y)=1+\frac{y^2}{2x}$ och $D=\left\{(x,y):1\le x\le 9,-3\sqrt{x}\le y\le 3\sqrt{x}\right\}$.
Beräkna volymen av kroppen $K=\{(x,y,z):(x,y)\in D, 0\le z\le f(x,y)\}$
och arean av ytan $Y=\{(x,y,z):z=f(x,y),(x,y)\in D\}$. (10p)

3. Beräkna $\iiint_\Omega \frac{1}{e^{(x-y)^2}\sqrt{z+z(x+y)^2}}\,dxdydz$ där $\Omega=\left\{(x,y,z):(x,y)\in\mathbb{R}^2, 0\le z\le \frac{1}{1+(x+y)^2}\right\}$. (8p)

4. Fältet $\boldsymbol{v}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ges av $\boldsymbol{v}(x,y,z)=(-xz,yz,xy)$.

a) Är $\boldsymbol{v}$ bijektivt lokalt i $(1,1,1)$? Är $\boldsymbol{v}$ konservativt i $\mathbb{R}^3$? (2p var) (4p)

b) Beräkna flödet av $\boldsymbol{v}$ genom ytan $Y=\left\{(x,y,z):x^2+y^2=1, 0\le z\le\sqrt{1-x^2+y^2}\right\}$ bort från origo. (7p)

5. Visa att $x+y+z\ge 3$ för alla positiva reella tal x,y,z sådana att $xyz=1$. (7p)

6. **a)** Definiera enkel kurva och sluten kurva i $\mathbb{R}^n$. (3p)

b) Vad är differentialen till ett C^1-fält $\mathbb{F}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$? (3p)

7. Definiera riktningsderivatan $f_{\boldsymbol{v}}'(\boldsymbol{a})$ och visa hur $f_{\boldsymbol{v}}'(\boldsymbol{a})$ kan uttryckas med hjälp av gradienten i fall f är differentierbar. Vad säger detta om gradientens fysikaliska betydelse? (7p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

gamla tentor mve035 (08/09)

SVAR

10-01-14: **1a)** ½ **b)** nej **c)** $-2-2\sinh 1$ **2)** $m(K)=260,\ m(Y)=140$ **3)** $\pi\sqrt{\pi}$ **4)** $\mathbb{V}$ är lokalt bijektivt i $(1,1,1)$, ej konservativt **b)** $\frac{\pi}{2}$
09-08-25: **1b)** $\frac{16\ln 2}{250}$ **2)** $yg\left(ye^{\frac{1}{x}}\right)$ **3)** $4\pi\sqrt{\pi}$ **4)** $\frac{\pi^5}{5}$ **5)** $\left[\frac{1}{3},1\right]$ **6a)** $\left(z+z^2,\ x-2z,\ 2xz-y\right)$ **b)** 0 **c)** $\frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$
09-03-12: **1a)** $2x+2y-z+1=0$ **b)** $(0,0)$, sadelpunkt **2)** $\frac{350\pi}{3}$ **3c)** $4xyz$ **e)** 1 **4)** $[-4,\ 4]$
09-01-14: **1)** $4x-y-z=8$ **2)** $\frac{\pi}{2}\left(\frac{7\sqrt{5}}{4}+\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$ **3a)** lokal minimipunkt, **b)** sadelpunkt **4a)** bijektivt lokalt i origo, ej konservativt **b)** $\frac{12\pi}{5}$ 4) $\ln\left(\cosh\left(\frac{1}{2\pi}\right)-\frac{1}{2\pi}\right)$ **6)** $2^{\frac{5}{6}}$
08-08-25: 1) $\mathbb{F}$ är konservativt, $div\mathbb{F}=2\left(\cosh(x+y)+\sinh(y-z)\right)+1$, ökar i $(1,1,1)$ mest i riktningen $(\sinh 2, \sinh 2+1, -1)$ **2a)** $\pi-2$ **b)** ja **3)** $\frac{3(e^4-e)}{8}$ **4)** $\left(2x^2-3y^2\right)e^{2x}$ **5a)** 0 **b)** $\frac{\sqrt{6}}{9}$
08-03-14: 1a) $x-y-3z+3=0$ **b)** $\frac{1}{3}$ **2)** $\frac{9}{8}$ **3)** lägst: $-\left(\frac{2}{\sqrt{3}},0,\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)$, högst: $\left(0,\pm\sqrt{2},2\right)$ **4a)** i origo: nej, i $(1,1,1)$: ja **b)** varken eller **c)** $\frac{-10\pi}{\sqrt{6}}$ **5)** $2a^2+\frac{a^5}{5}$