

Tentamen i Flervariabelanalys F/TM, MVE035

2012 03 08 kl. 14.00–18.00.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.

Telefon: Peter Helgesson tel 0703-088304

För godkänt krävs minst 24 poäng.

Betyg 3: 24-35 poäng, betyg 4: 36-47 poäng, betyg 5: 48 poäng eller mera. Bonuspoäng från 2012 ingår.

Lösningar kommer på kursens hemsida:

<http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve035/1112>

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

- Bestäm en ekvation för tangentplanet till grafen för funktionen $f(x, y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{1}{y}$ i punkten $(2, 1, 7)$. (3p)
 - Funktionen i (a) har en enda stationär punkt. Bestäm den och avgör dess karaktär. (4p)
 - En partikel rör sig rätlinjigt från $(1, 0)$ till $(2, 1)$ och påverkas av kraftfältet $\mathbf{F} = (xy, -x^2)$. Beräkna det arbete som fältet uträttar. (3p)
 - Kring vilka punkter i xy -planet är avbildningen $(x, y) \mapsto (x^2 - 2y^2, x^3 + y^3)$ lokalt bijektiv? (3p)

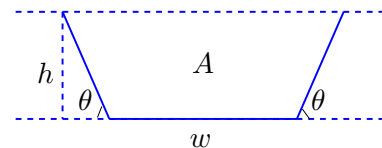
- Beräkna arean av ytan $\{(x, y, z) : x^2 + 2y - z = 0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$. (7p)

- Beräkna $\iiint_D xz \, dx dy dz$, där $D = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq y, x^2 + y^2 \leq 4\}$. (7p)

- Beräkna ytintegralen $\iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS$, där $\mathbf{F} = (y \cos(xz), -xy \sin(z^2), e^{x^2})$ och Y är ytan $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 2, z \geq 0\}$ med normalriktning ut från z -axeln. (5p)

- En bevattningskanal har en tvärsnittsprofil i form av ett parallelltrapets, se figuren! (7p)

Vattnets flödeshastighet antas bli omvänt proportionell mot den "våta omkretsen" P , dvs summan av de tre heldragna längderna i figuren. Vi antar nu att tvärsnittsarean är given $= A$ och vill alltså minimera P under detta villkor. Bestäm kanalens bredd w i botten och dess djup h , samt lutningsvinkeln θ då P är minimal.



- Beräkna $\iint_E e^{-d(x,y)^2} \, dx dy$, där $d(x, y)$ är (minsta) avståndet från punkten (x, y) till första kvadranten av enhetscirkelskivan och E är hela xy -planet utom nämnda kvartscirkelskiva. (7p)

- Formulera och bevisa under lämpliga förutsättningar *kedjeregeln* för en funktion $f \circ g$, där g är en funktion av en variabel med värden i \mathbb{R}^2 och f en reellvärd funktion av två variabler. (7p)

- Låt \mathbf{F} vara ett vektorfält definierat i en mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Antag att kurvintegralen av \mathbf{F} är oberoende av vägen i Ω , och visa under lämpliga förutsättningar på \mathbf{F} och Ω att fältet har en potential i Ω . (7p)

Lösningar till tentan 2012 03 08

1. (a) Vi deriverar: $f'_x(x, y) = y - \frac{8}{x^2}$, $f'_y(x, y) = x - \frac{1}{y^2}$.

Tangentplanetns ekvation:

$$z = f(2, 1) + f'_x(2, 1)(x - 2) + f'_y(2, 1)(y - 1) \iff z = 7 - (x - 2) + (y - 1) \iff x - y + z = 8$$

(b) För stationär(a) punkt(er) löser vi ekvationssystemet $\nabla f = \mathbf{0}$:

$$\begin{cases} y - \frac{8}{x^2} = 0 \\ x - \frac{1}{y^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{8}{x^2} \\ x = \frac{x^4}{64} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{8}{x^2} \\ x^3 = 64 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Enda stationära punkt är alltså $(4, \frac{1}{2})$. Dess karaktär bestäms av den kvadratiske formen

$$Q(h) = f''_{xx}(4, \frac{1}{2})h^2 + 2f''_{xy}(4, \frac{1}{2})hk + f''_{yy}(4, \frac{1}{2})k^2 \text{ där } h = x - 4, k = y - \frac{1}{2}.$$

Vi har $f''_{xx}(x, y) = \frac{16}{x^3}$, $f''_{xy}(x, y) = 1$, $f''_{yy}(x, y) = \frac{2}{y^3}$, vilket ger

$$Q(h) = \frac{h^2}{4} + 2hk + 16k^2 = \frac{1}{4}((h + 4k)^2 + 48k^2), \text{ som är positivt definit (dvs positiv för alla } (h, k) \neq (0, 0).$$

Detta medför att $(4, \frac{1}{2})$ är ett **lokalt minimum**.

(c) Parametrisera sträckan: $\mathbf{r}(t) = (1, 0) + t((2, 1) - (1, 0)) = (1 + t, t)$, $0 < t < 1$.

$$\text{Arbetet blir } W = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^1 ((1 + t)t, -(1 + t)^2) \cdot (1, 1) dt = \int_0^1 (-t - 1) dt = -\frac{3}{2}.$$

(d) En garanti för lokal bijektivitet är att avbildningens funktionaldeterminant (Jakobian) är skild från noll.

Vi undersöker detta:

$$\begin{vmatrix} 2x & -4y \\ 3x^2 & 3y^2 \end{vmatrix} = 6xy(y + 2x)$$

Detta innebär att lokal bijektivitet föreligger åtminstone i **alla punkter utom de som ligger på koordinataxlarna och de som ligger på linjen $2x + y = 0$** . (Undersökning av dessa punkter krävdes inte).

2. Ytan parametriseras lätt av x - och y -koordinaterna:

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x^2 + 2y), \text{ med normalvektor } \mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (-z'_x, -z'_y, 1) = (-2x, -2, 1)$$

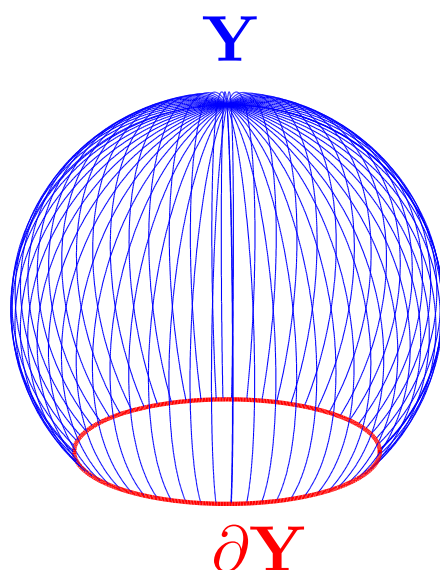
Arean är då integralen av normalvektorns längd över parameterområdet $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$, dvs

$$\begin{aligned} A &= \iint_D |(-2x, -2, 1)| dx dy = \iint_D \sqrt{4x^2 + 5} dx dy = \int_0^1 \sqrt{4x^2 + 5} dx \int_0^x dy = \int_0^1 x\sqrt{4x^2 + 5} dx = \\ &= \left[\frac{1}{12}(4x^2 + 5)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{27 - 5\sqrt{5}}{12} \end{aligned}$$

3. Upprepad integration ger:

$$\begin{aligned} \iiint_D xz \, dx dy dz &= \left(\text{med } E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\} \right) = \iint_D dx dy \int_0^y xz \, dz = \iint_D \frac{xy^2}{2} dx dy = \\ &\left(\text{med polära koordinater, } J = r \right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 \frac{r^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{2} r \, dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^2 \frac{r^4}{2} \, dr = \\ &= \left[\frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^5}{10} \right]_0^2 = \frac{16}{15} \end{aligned}$$

4. Vi bekantar oss först med ytan, som är en (stor) del av en sfär. Centrum är $(0, 0, 1)$, radien $\sqrt{2}$. Dess rand är enhetscirkeln i xy -planet (sätt in $z = 0$ i sfärens ekvation), som är markerad med rött i figuren.



Ytan och fältet är jättesnälla och *Stokes sats* kan tillämpas. Att integrera $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}$ över ytan Y är enligt Stokes sats detsamma som att integrera \mathbf{F} längs kurvan ∂Y , förutsatt att vi väljer orienteringen rätt. I detta fall är normalen på "lampkupan" riktad utåt (från z -axeln), vilket betyder att ∂Y ska genomlöpas i positiv led i xy -planet (där den ju ligger). På ∂Y är $z = 0$ och därmed formellt $dz = 0$, vi får:

$$I = \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS = \int_{\partial Y} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} \, d\mathbf{r} = \int_{\partial Y} y \cos(xz) \, dx - xy \sin(z^2) \, dy + e^{x^2} \, dz = \int_{\partial Y} y \, dx + 0 \, dy$$

Nu kan vi parametrisera enhetscirkeln, men vi kan också använda Greens formel (Stokes sats i planet) för att återgå till en yntegral, som i det plana fallet är en dubbelintegral. Om D betecknar enhetscirkelskivan blir det till slut:

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(y)}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (-1) dx dy = -m(D) = -\pi$$

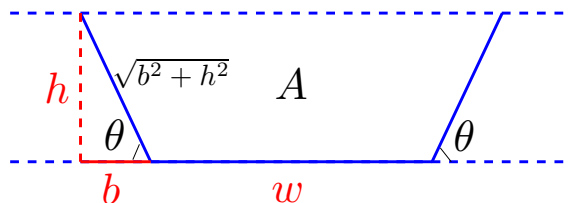
5. Vi kan välja de tre sträckorna w , b , h (se figuren nedan!) som variabler. Då har vi vår målfunktion

$$P(w, b, h) = w + 2\sqrt{b^2 + h^2}$$

som ska minimeras under bivillkoret att tvärsnittsarean är A , dvs att $g(w, b, h) = 0$, där

$$g(w, b, h) = h(b + w) - A$$

(arean utgörs av två rektangelareor med samma höjd h). Vi förutsätter förstås att $A > 0$.



Vi betraktar först en kompakt delmängd av variabelrummet:

$$M = \{(w, b, h) : 0 \leq w \leq W, 0 \leq b \leq B, 0 \leq h \leq H, g = 0\}$$

och eftersom P är kontinuerlig på M har P både största och minsta värde där. Om detta inträffar i en inre punkt av M , så säger teorin med Lagranges multiplikatormetod ("undantagsfallet" $\nabla g = \mathbf{0}$ är inte aktuellt, eftersom det motsvarar $h = b = w = 0$ och därmed $g = -A \neq 0$) att denna punkt är lösning till systemet

$$\begin{cases} \nabla P = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = \lambda h \\ \frac{2b}{\sqrt{b^2 + h^2}} = \lambda h \\ \frac{2h}{\sqrt{b^2 + h^2}} = \lambda(b + w) \\ A = h(b + w) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2b}{\sqrt{b^2 + h^2}} = 1 \\ \frac{2h}{\sqrt{b^2 + h^2}} = \frac{b+w}{h} \\ A = h(b + w) \end{cases} \iff \begin{cases} h = b\sqrt{3} \\ 6b^2 = 2b(b + w) \\ A = \sqrt{3}b(b + w) \end{cases} \iff \begin{cases} w = \sqrt{\frac{4A}{3\sqrt{3}}} \\ b = \sqrt{\frac{A}{3\sqrt{3}}} \\ h = \sqrt{\frac{A}{\sqrt{3}}} \end{cases}$$

Detta ger därtill $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$, och i den funna punkten blir $P = \sqrt{4\sqrt{3}A}$.

För att ordentligt motivera att detta är vårt minimum, konstaterar vi att om gränserna W , B och H vi valt i den kompakta avskärningen M är stora nog (t. ex. $= \sqrt{A}$), så är den punkt som befanns vara den enda lösningen till vårt system en inre punkt i M . Om vi kan fastställa att värdena av P på randen av M och utanför M är större än i denna punkt, så återstår bara den möjligheten att den funna punkten är minimum av P då $g = 0$, både på M och globalt. För $w \geq W$, $b \geq B$, $h \geq H$ växer P i vardera variabeln, så dessa riktningar är inga problem. För $h = 0$ kan inte bivillkoret gälla. Återstår då två randytor: $w = 0$ och $b = 0$.

$$w = 0 \Rightarrow bh = A, P = 2\sqrt{b^2 + \frac{A^2}{b^2}}$$

$$b = 0 \Rightarrow wh = A, P = w + \frac{2A}{w}$$

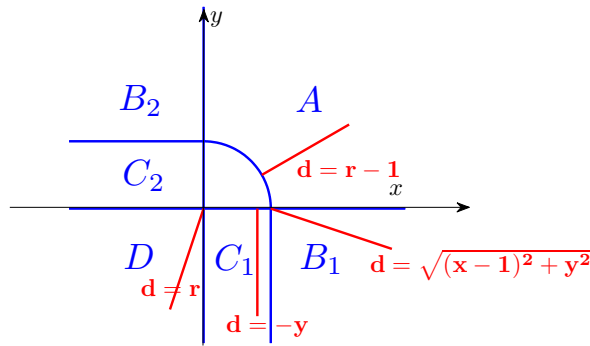
I båda dessa fall deriverar vi och hittar minsta värden, här utan detaljer:

$P(0, \sqrt{A}, \sqrt{A}) = \sqrt{8A}$ samt $P(\sqrt{2A}, 0, \sqrt{\frac{A}{2}}) = \sqrt{8A}$. Dessa är större än det tidigare funna värdet $\sqrt{4\sqrt{3}A}$ som alltså är vårt minimum.

Svar: För minimalt P ska vi ha $w = \sqrt{\frac{4A}{3\sqrt{3}}}$, $h = \sqrt{\frac{A}{\sqrt{3}}}$ och $\theta = \frac{\pi}{3}$.

(Det går förstås bra att arbeta med variablerna w , h , θ också.)

6. Vi delar in området i 6 delar enligt figuren: $E = A \cup B_1 \cup B_2 \cup C_1 \cup C_2 \cup D$.



I varje delområde har funktionen $d(x, y)$ en speciell form. Av symmetriskäl blir bidragen lika från B_1 och B_2 , liksom från C_1 och C_2 . Därför är $\iint_E = \iint_A + 2 \iint_{B_1} + 2 \iint_{C_1} + \iint_D$.

Vi konstaterar också att $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (jämn integrand).

I område A är $d(x, y) = r - 1$, där $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (förläng radien från origo till (x, y)).

I område B_1 är $d(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ (eftersom $(1, 0)$ är närmaste punkt i kvartscirkeln).

I område C_1 är $d(x, y) = -y$

I område D är $d(x, y) = r$ (origo närmaste punkt).

$$\begin{aligned} \iint_A e^{-d(x,y)^2} dx dy &= \iint_A e^{-(r-1)^2} dx dy = \{ \text{polära koordinater} \} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^\infty r e^{-(r-1)^2} dr d\theta = \\ \{ \text{Byt till } s = r - 1 \text{ i inre integralen} \} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty (s+1) e^{-s^2} ds d\theta = \frac{\pi}{2} \left(\left[-\frac{e^{-s^2}}{2} \right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-s^2} ds \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi\sqrt{\pi}}{4} \end{aligned}$$

I B_1 använder vi polära koordinater centrerade kring $(1, 0)$, dvs

$$\begin{cases} x = 1 + r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad J = r, \quad 0 \leq r < \infty, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$$

$$\iint_{B_1} e^{-d(x,y)^2} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_0^\infty r e^{-r^2} dr = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{4}$$

$$\iint_{C_1} e^{-d(x,y)^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_{-\infty}^0 e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

I område D är det åter polära koordinater som gäller:

$$\iint_D e^{-d(x,y)^2} dx dy = \iint_A e^{-r^2} dx dy = \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty r e^{-r^2} dr = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{4}$$

Slutligen har vi därmed

$$\iint_E e^{-d(x,y)^2} dx dy = \iint_A + 2 \iint_{B_1} + 2 \iint_{C_1} + \iint_D = \pi + \sqrt{\pi} + \frac{\pi\sqrt{\pi}}{4}$$