Tentamen i Flervariabelanalys F/TM, MVE035

2014 08 25 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.

Telefon: Matteo Molteni, 0703-088304

För godkänt krävs minst 24 poäng. Betyg 3: 24-35 poäng, betyg 4: 36-47 poäng, betyg 5: 48 poäng eller mera.

Bonuspoäng från 2014 ingår.

Lösningar kommer på kursens hemsida: http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve035/1314

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

Examinator: Lennart Falk.

---

1. (a) Funktionen $f(x, y) = (x - y)(1 - xy)$ har stationär punkt i $(1, 1)$. Klassificera den: lokalt max, lokalt min eller sadelpunkt. (2p)

   (b) Uttryck $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ i de nya variablerna $u = x,\ v = \frac{y}{x}$ och derivator i dessa variabler. (3p)

   (c) Motivera varför ekvationen $x^3 + y^3 + xy = 11$ lokalt kring punkten $(1, 2)$ definierar y som en deriverbar funktion av x och beräkna $y'(1)$. (3p)

   (d) Skriv om den upprepade trippelintegralen $\int_0^1 (\int_0^z (\int_0^y f(x, y, z)dx)dy)dz$ så att man först integrerar z, sedan y och sist x. (2p)

2. Låt S_1 och S_2 vara ytorna $z = 8 - x^2 + y^2$ och $z = x^2 + 3y^2$. (8p)

   (a) Beräkna volymen av den kropp V som begränsas av ytorna S_1 och S_2.

   (b) Vektorfältet $\boldsymbol{F} = (z + xy, y - y^2, x + yz)$ beskriver ett flöde genom den kropp som begränsas av ytorna S_1 och S_2. Beräkna det totala flödet ut från kroppen.

   (c) Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma (ze^{xz}, x, xe^{xz}) \cdot d\boldsymbol{r}$ där γ är skärningskurvan mellan ytorna S_1 och S_2 orienterad så att dess projektion på xy-planet går moturs.

3. (a) Vilket fält i planet har potentialen xe^{y^2}? (1p)

   (b) Beräkna kurvintegralen $\int_C (e^{y^2} - y)dx + (2xye^{y^2} + x)dy$, där C är halvcirkelbågen i övre halvplanet från $(1, 0)$ till $(-1, 0)$. (5p)

4. Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dxdy$, där D bestäms av olikheterna $x > 0,\ xy > 1$. Använd gärna polära koordinater. (7p)

5. Beräkna det minsta avståndet från origo till ytan $xy^2z^3 = 2$. (7p)

6. Den maximala arean av en triangel vars alla hörn ligger på en cirkel antas för en liksidig triangel. Vilken är den maximala arean av en triangel vars alla hörn ligger på ellipsen $5x^2 + 6y^2 = 30$? (7p)

7. (a) Definiera *differentierbarhet* för en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^1$. (2p)

   (b) Definiera *riktningsderivtan* $f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a})$ av en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^1$ i en punkt $\boldsymbol{a}$ i riktningen given av enhetsvektorn $\boldsymbol{v}$. (2p)

   (c) Bevisa att om f är differentierbar, kan riktningsderivatan beräknas enligt formeln $f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v}$. (4p)

8. Formulera och bevisa Greens formel. (7p)

Kortfattade lösningar till tentan MVE035 2014-08-25

1. (a) Vi har $f'_x = 1 - 2xy + y^2,\ f'_y = -1 + 2xy - y^2$ (och därmed $f'_x(1,1) = f'_y(1,1) = 0$ som sig bör). Vidare är $f''_{xx} = -2y,\ f''_{xy} = -2x + 2y,\ f''_{yy} = 2x$, så den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = \frac{1}{2}(f''_{xx}(1,1)h^2 + 2f''_{xy}(1,1)hk + f''_{yy}(1,1)k^2) = -h^2 + k^2$$

är tydligen *indefinit*: $Q(1,0) = -1 < 0,\ Q(0,1) = 1 > 0$. Därmed är punkten $(1,1)$ en **sadelpunkt**.

(b)

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \text{(kedjeregeln)} = x(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}) + y(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}) =$$
$$= x(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}(-\frac{y}{x^2})) + y(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot 0 + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{x}) = x\frac{\partial z}{\partial u} = \mathbf{u}\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{u}}$$

(c) Ekvationen $F(x,y) = 0$ med $F \in \mathcal{C}^1$ definierar lokalt kring punkten (a,b) där $F(a,b) = 0$, variabeln y som en $\mathcal{C}^1$-funktion av x om $F'_y(a,b) \neq 0$. Med $F(x,y) = x^3 + y^3 + xy - 11$ har vi $F'_y(1,2) = 13 \neq 0$, derivatan blir $y'(x) = -\frac{F'_x(1,2)}{F'_y(1,2)} = -\frac{3x^2+y}{3y^2+x}$ och $y'(1) = -\mathbf{\frac{5}{13}}$.

(d)

$$\int_0^1(\int_0^z(\int_0^y f(x,y,z)dx)dy)dz = \int_\mathbf{0}^\mathbf{1}(\int_\mathbf{x}^\mathbf{1}(\int_\mathbf{y}^\mathbf{1} \mathbf{f(x,y,z)dz})\mathbf{dy})\mathbf{dx}$$

Mängden vi integrerar över kan skrivas: $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$. Den första integrationen i z sker då över intervallet $y \leq z \leq 1$. Därefter återstår området $0 \leq x \leq y \leq 1$ i xy-planet, vilket kan skrivas: $x \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1$. Detta ger de två sista stegen. (Rita gärna!)

2. (a) Skärningskurvan mellan ytorna ges av

$$\begin{cases} z = 8 - x^2 + y^2 \\ z = x^2 + 3y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 4 + 2y^2 \end{cases}$$

Projektionen av området V på xy-planet är alltså cirkelskivan $D = (x,y) : x^2 + y^2 \leq 4$. Volymen blir då

$$\iint_D ((8 - x^2 + y^2) - (x^2 + 3y^2))\,dxdy = \iint_D (8 - 2x^2 - 2y^2)\,dxdy = \text{(polära koordinater)}$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (8 - 2r^2)r\,drd\theta = \mathbf{16}\pi$$

(b) Detta är ett fall för Gauss sats. Med normalriktning ut från V är flödet detsamma som trippelintegralen

$$\iiint_V div\boldsymbol{F}\,dxdydz = \iiint_V (y + 1 - 2y + y)\,dxdydz = \iiint_V 1\,dxdydz = \text{vol}(V) = \mathbf{16}\pi$$

(c) Här är det Stokes sats som hjälper:

$$\int_\gamma (ze^{xz}, x, xe^{xz})\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_Y \nabla \times (ze^{xz}, x, xe^{xz})\cdot \boldsymbol{N}dS$$

där Y är en av de två ytorna som har γ som rand, vi kan välja $z = x^2 + 3y^2$. Normalen ska vara uppåt (i z-led) för att Stokes ska vara nöjd. Eftersom $\nabla \times (ze^{xz}, x, xe^{xz}) = (0,0,1)$ och ytan Y kan framställas som $\boldsymbol{r} = (x, y, x^2 + 3y^2)$ med $\boldsymbol{r}'_x \times \boldsymbol{r}'_y = (-2x, -6y, 1)$, får vi till slut

$$\int_\gamma (ze^{xz}, x, xe^{xz})\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_D (0,0,1)\cdot(-2x,-6y,1)\,dxdy = \iint_D 1\,dxdy = \text{area}(D) = \mathbf{4}\pi$$

3. (a) Fältet är $\nabla xe^{y^2} = (\mathbf{e^{y^2}}, \mathbf{2xye^{y^2}})$.

(b) Vårt fält är $\boldsymbol{F} = (e^{y^2}, 2xye^{y^2}) + (-y, x)$. Vi kan därför utnyttja potentialen enligt (a) och integralens additivitet:

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C e^{y^2}\,dx + 2xye^{y^2}\,dy + \int_C -y\,dx + x\,dy$$

Den första integralen är potentialdifferensen mellan punkterna $(-1,0)$ och $(1,0)$, den andra beräknas genom parametrisering av halvcirkelbågen: $(x,y) = (\cos t, \sin t),\ 0 \leq t \leq \pi$. Det ger:

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \left[xe^{y^2}\right]_{(1,0)}^{(-1,0)} + \int_0^\pi (-\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t)\,dt = -\mathbf{2} + \pi$$

4. Integranden är positiv. I polära koordinater beskrivs området av olikheterna $0 < \theta < \frac{\pi}{2},\ r^2 \cos\theta \sin\theta > 1$. Byter vi till polära koordinater får vi därmed

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy = \iint_{D'} \frac{r}{r^4}\,drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}}^{\infty} \frac{1}{r^3}\,drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\cos\theta}{2}\,d\theta = \left[\frac{\sin^2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

Anm: Vill man vara utförlig med uttömmande mängder, kan man begränsa variablerna enligt $\frac{1}{n} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$ och $r \leq r_n$ där r_n är värdet på r där kurvan $xy = 1$ skär $\theta = \frac{1}{n}$. När man låter $n \to \infty$ får man precis som i de avslutande leden ovan. En under kursen refererad sats om variabelbyte för konvergenta integraler med positiv integrand tillåter oss att göra som ovan, fast den står inte i kursboken.

5. Bilda en kompakt delmängd Y av ytan (ytorna) genom att snitta den med sfären $x^2+y^2+z^2 = 9$. T. ex. ligger punkten $(2,1,1)$ på ytan $xy^2z^3 = 2$ och innanför sfären ($\sqrt{6} < 3$). Vi väljer att minimera avståndets kvadrat $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ på Y. Då f är kontinuerlig och Y är kompakt, har vi en sats som garanterar existensen av största värde (=9) och minsta värde av f på Y. Mängden Y karakteriseras av bivillkoret $g(x,y,z) = xy^2z^3 - 2 = 0,\ x^2+y^2+z^2 \leq 9$. Då minimum antas i en inre punkt till $D_f \cap D_g$, så måste i varje minimipunkt gradienterna till f och g vara parallella, dvs $\nabla f = \lambda \nabla g,\ g = 0$ eller $\nabla g = 0,\ g = 0$. Det senare kan inte vara uppfyllt, då $\nabla g = 0$ kräver att någon koordinat är noll, så $g = -2$. Vi löser det första systemet:

$$\begin{cases} 2x &= \lambda y^2 z^3 \\ 2y &= \lambda 2xyz^3 \\ 2z &= \lambda 3xy^2z^2 \\ xy^2z^3 &= 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x^2 &= \lambda 6xy^2z^3 \\ 6y^2 &= \lambda 6xy^2z^3 \\ 4z^2 &= \lambda 6xy^2z^3 \\ xy^2z^3 &= 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 &= 2x^2 \\ z^2 &= 3x^2 \\ xy^2z^3 &= 2 \end{cases}$$

och vi får till slut $x^2 = 3^{-\frac{1}{2}},\ y^2 = 2\cdot 3^{-\frac{1}{2}},\ z^2 = 3\cdot 3^{-\frac{1}{2}}$. Med dessa värden (som svarar mot 4 olika punkter på Y, inte 8 eftersom x och z måste ha samma tecken) får vi $f = 6\cdot 3^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}$, vilket (som enda kandidat) måste vara minsta värdet av f på Y. Minsta avståndet är då $\sqrt{\mathbf{2\sqrt{3}}} \approx \mathbf{1,86}$.

6. Vår ellips har ekvationen $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ i standardiserad form, halvaxlarna är tydligen $\sqrt{6}$ och $\sqrt{5}$. Med den linjära avbildningen $L : (x,v) = (\sqrt{6}u, \sqrt{5}v)$ avbildas enhetscirkeln $u^2+v^2 = 1$ omvändbart på vår ellips. Trianglar i xy-planet och trianglar i uv-planet avbildas i varandra av L och dess invers. Jacobianen för L är $\sqrt{30}$. Genom variabelbyte ser vi att om området D' i uv-planet avbildas på området D i xy-planet, så är

$$\text{Area}(D) = \iint_D 1\,dxdy = \iint_{D'} \sqrt{30}\,dudv = \sqrt{30}\,\text{Area}(D')$$

Av detta förstår vi att den största triangeln på enhetscirkeln motsvaras av den största triangeln på ellipsen. Den liksidiga triangeln inskriven i enhetscirkeln kan med radier delas upp i tre kongruenta likbenta trianglar med två sidor =1 och mellanliggande vinkel $\frac{2\pi}{3}$, därmed har den arean $3\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Motsvarande triangel på ellipsen har arean $\sqrt{30}\frac{3\sqrt{3}}{4} = \mathbf{\frac{9\sqrt{10}}{4}}$, vilket alltså är den maximala arean av en triangel inskriven i ellipsen.

7. Se läroboken!

8. Se läroboken!