Tentamen i Flervariabelanalys F/TM, MVE035

2015 03 16 kl. 14.00–18.00.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.

Telefon: Lennart Falk, 772 3564

För godkänt krävs minst 20 poäng.

Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40 poäng eller mera. Bonuspoäng från 2015 ingår.

Lösningar kommer på kursens hemsida: http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve035/1415

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

Examinator: Lennart Falk.

---

1. (a) Bestäm en ekvation för det plan som tangerar ytan $xy^2 - xy - z^2 = -2$ i punkten $(1, -1, -2)$. (2p)

   (b) Funktionen $f(x, y) = 2xy + x^2 - y^2$ har en stationär punkt. Vilken sort? (2p)

   (c) Transformera den partiella differentialekvationen $\frac{\partial f}{\partial x} + 2x\frac{\partial f}{\partial y} = y$ genom variabelbytet $u = -x^2 + y,\ v = x$. (Lös ej!) (2p)

   (d) Bestäm en funktion $Q(x, y)$ så att värdet av kurvintegralen $\int_C (6xy^3 + 6x^2y)\, dx + Q(x, y)\, dy$ endast beror på var kurvan C startar och slutar. (2p)

2. Beräkna kurvintegralen $\int_C (2y + x^2 e^{\sin x})dx + (4x - y^3)dy$, där C är högra halvan av cirkeln $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$ genomlöpt från $(-3, 0)$ till $(-3, 4)$. (6p)

3. (a) Låt K vara den kropp som begränsas av ytorna $z = 8 - x^2 + y^2$ och $z = x^2 + 3y^2$. Beräkna volymen av K. (4p)

   (b) Om $\boldsymbol{u} = (xy, y - y^2 + z, x + yz)$ är hastighetsfältet för en strömning, beräkna flödet av $\boldsymbol{u}$ ut från K. (2p)

   (c) Om en partikel rör sig längs skärningskurvan mellan ytorna som begränsar K (enligt (a)) så att kurvans projektion på xy-planet genomlöps moturs, och om den påverkas av kraftfältet (ze^{xz}, x, xe^{xz}), vilket arbete uträttas då på partikeln? (4p)

   (d) Beräkna koordinaterna för masscentrum av K om vi antar att densiteten är konstant. (Masscentrum ligger på z-axeln, så det räcker att beräkna dess z-koordinat.) (4p)

4. Den totala produktionen av en vara beror på kostnaderna av investeringar K (till exempel maskiner) och av arbetskraft L . Vi antar nu att produktionen följer *Cobb-Douglas modell*:

   $$P = CK^{\alpha}L^{1-\alpha},\ \text{där } C > 0 \text{ och } \alpha \in (0, 1) \text{ är konstanter.}$$

   Antag också att man har ett totalbelopp A att dela upp mellan kostnaderna K och L. Bestäm K och L så att produktionen maximeras under detta villkor. Metoden för att söka max/min under bivillkor ska användas. (4p)

5. Beräkna

   $$F(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t}\, dt, \quad x > 0,\ y > 0.$$

   Tips: man kan använda sig av ”derivering under integraltecknet” eller av en generaliserad dubbelintegral. (6p)

6. Låt $\boldsymbol{F}$ vara ett vektorfält definierat i en mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Antag att kurvintegralen av $\boldsymbol{F}$ är oberoende av vägen i Ω, och visa under lämpliga förutsättningar på $\boldsymbol{F}$ och Ω att fältet har en potential i Ω. (6p)

7. (a) Den implicita funktionssatsen handlar (ofullständigt uttryckt) om att i en ekvation av typen $F(x, y) = C$ kunna uppfatta variabeln y som en deriverbar funktion $y = f(x)$. Formulera satsen i sin helhet (utan bevis). (2p)

   (b) Man kan ändra villkoren på $F(x, y)$ i implicita funktionssatsen så att man kan garantera derivator upp till ordning $k(= 2, 3, \ldots)$ av $f(x)$. Hur ska detta göras? Använd den tidigare versionen av satsen för att motivera giltigheten av den nya. (4p)

Kortfattade lösningar till tentan MVE035 2015-03-16

1. (a) En normalvektor till ytan $f(x,y,z) = -2$ i punkten $P = (1,-1,-2)$ är gradienten till f i punkten P, dvs $\nabla f(P) = (y^2 - y, 2xy - x, -2z)|_P = (2,-3,4)$. Tangentplanet har då en ekvation av typen $2x - 3y + 4z = D$, där insättning av P ger oss $D = -3$. Tangentplanet ges av ekvationen

$$\mathbf{2x - 3y + 4z = -3}.$$

(b) $\nabla f = (2y + 2x, 2x - 2y) = (0,0)$ har en enda lösning $(x,y) = (0,0)$. I denna enda stationära punkt är den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = \frac{1}{2}(f''_{xx}(0,0)h^2 + 2f''_{xy}(0,0)hk + f''_{yy}(0,0)k^2) = h^2 + 2hk - k^2 = (h+k)^2 - 2k^2$$

Vi ser att denna kvadratiska form är *indefinit*, så vi har en sadelpunkt.

Origo är en sadelpunkt.

(c) Med kedjeregeln får vi, med $\tilde{f}(u,v) = f(x,y)$ (det är OK att behålla funktionsnamnet f):

$$\frac{\partial f}{\partial x} + 2x\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + 2x(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(-2x) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} + 2x(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\cdot 0) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}$$

Eftersom $y = u + x^2 = u + v^2$ får vi den nya ekvationen: $\mathbf{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} = u + v^2}$.

(d) Om $P(x,y) = 6xy^3 + 6x^2y$ så ska $P'_y = Q'_x$ vara uppfylld (då är integralen oberoende av vägen). Detta ger $18xy^2 + 6x^2 = Q'_x \quad \Rightarrow \quad Q = 9x^2y^2 + 2x^3 + g(y)$, där vi kan välja (t. ex.) $g(y) = 0$. Alltså kan vi ta

$$\mathbf{Q(x,y) = 9x^2y^2 + 2x^3}.$$

(Man kan också utgå ifrån att det ska finnas en potential.)

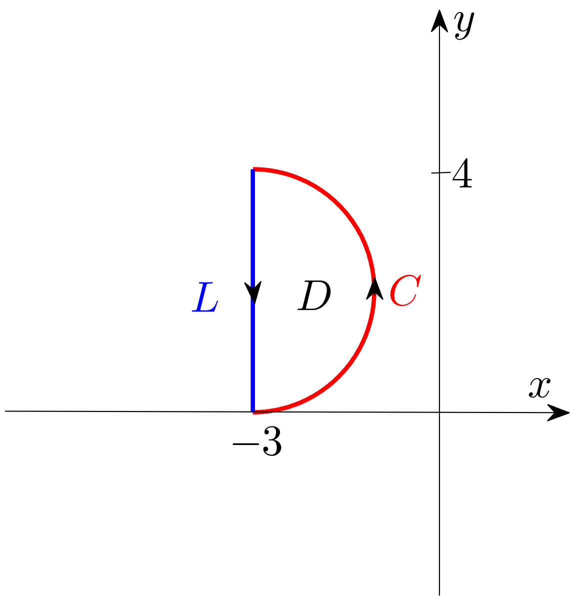
2. Om vi sluter kurvan genom att lägga till sträckan L mellan $(-3,0)$ och $(-3,4)$, så har kan vi använda Greens formel (fältet är $\mathcal{C}^1$ överallt, randen är $\mathcal{C}^1$, omloppsriktningen är positiv) för denna nya kurva. Vi måste då också beräkna kurvintegralen över L och subtrahera den. Med D lika med den högra halvcirkeln och ∂D orienterad positivt, samt $(P,Q) = (2y + x^2 e^{\sin x}, 4x - y^3)$ har vi då

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + \int_L P\,dx + Q\,dy = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dxdy$$

och därmed

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dxdy - \int_L P\,dx + Q\,dy = \iint_D 2\,dxdy - \int_4^0 (-12 - y^3)\,dy =$$

$$= 2\mu(D) - \int_0^4 (12 + y^3)\,dy = \mathbf{4\pi - 112}$$



3. (a) Vi studerar först skärningskurvan mellan ytorna, en sadelyta och en elliptisk paraboloid.

$$\left\{\begin{array}{rcl} z & = & 8-x^2+y^2 \\ z & = & x^2+3y^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 4 \\ z & = & 4+2y^2 \end{array}\right.$$

K begränsas därför av de två ytorna och en cylinder:

$$K = \{(x,y,z) : x^2+3y^2 \le z \le 8-x^2+y^2, \quad x^2+y^2 \le 4\}$$

Volymen av K kan då uppfattas som dubbelintegralen över $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4\}$ av ytornas differens:

$$\mu(K) = \iint_D \left((8-x^2+y^2)-(x^2+3y^2)\right) dxdy = \iint_D 2(4-x^2-y^2)\, dxdy$$

Vi ser att differensen är positiv inne i cylindern, så vi har tagit differensen rätt. Med polära koordinater ($J = r$) har vi

$$\mu(K) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 2(4-r^2) r\, dr = 4\pi \int_0^2 (4r-r^3)\, dr = \mathbf{16}\pi$$

(b) Här är det läge för Gauss sats, fältet $\boldsymbol{u}$ är $\mathcal{C}^1$, randytan ∂K är $\mathcal{C}^1$ och ges utåtriktad normal. Då ges flödet av $\boldsymbol{u}$ ut från K av en normalytintegral som enligt Gauss sats är

$$\iint_{\partial K} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{N}\, dS = \iiint_K \nabla\cdot\, \boldsymbol{u}\, dxdydz = \iiint_K 1\, dxdydz = \mu(K) = \mathbf{16}\pi$$

(c) Vi har sett att skärningskurvan är randkurva till $\mathcal{C}^1$-ytan

$$Y = \{(x,y,z) : z = x^2+3y^2\}, \ \text{ där } \ (x,y) \in D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 2\}$$

(den andra ytan går lika bra). Om vi låter ytans normalvektor peka uppåt, så är orienteringen av yta och randkurva så som begärs i Stokes sats. Fältet $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (ze^{xz}, x, xe^{xz})$ är ju också $\mathcal{C}^1$ överallt.
Vi har $\nabla\times\boldsymbol{F} = (0,0,1)$, och med $\boldsymbol{r}(x,y) = (x,y,x^2+3y^2)$ är $\boldsymbol{r}'_x \times \boldsymbol{r}'_y = (-2x,-6y,1)$. Stokes sats:

$$\int_{\partial Y} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_Y \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}\, dS = \iint_D (0,0,1)\cdot(-2x,-6y,1)\, dxdy = \iint_D 1\, dxdy = \mu(D) = \mathbf{4}\pi$$

(d) Vi behöver beräkna trippelintegralen $\iiint_K z\, dxdydz$, eftersom z-koordinaten för masscentrum för K är denna integral dividerad med volymen av K.

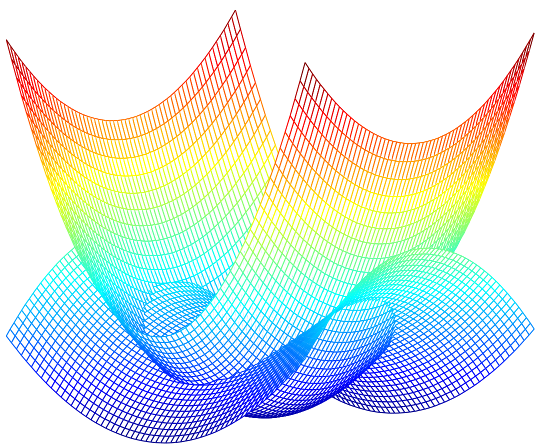
$$\iiint_K z\, dxdydz = \iint_D dxdy \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2+y^2} z\, dz = \iint_D \frac{1}{2}\left((8-x^2+y^2)^2-(x^2+3y^2)^2\right) dxdy =$$

$$= \iint_D \frac{1}{2}(8-2x^2-2y^2)(8+4y^2)\, dxdy = \left(\text{ polära koordinater, } J = r \ \right)$$

$$= \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(8-2r^2)(8+4r^2\sin^2\theta) r\, d\theta = \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(8-2r^2)(8+2r^2(1-\cos 2\theta)) r\, d\theta =$$

$$\left(\cos 2x \ \text{ integreras till noll } \ \right) = 4\pi \int_0^2 (4-r^2)(4+r^2) r dr = 4\pi \int_0^2 (16r-r^5)\, dr = \frac{16\pi\cdot 16}{3}$$

Vi dividerar med volymen av K som enligt (a) är 16π och får $z_T = \frac{16}{3}$ och masscentrum $(\mathbf{0},\mathbf{0},\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{3}})$.



4. Vi har ett bivillkor: $K+L=A,\ K\geq 0,\ L\geq 0$, vilket definierar en kompakt mängd. Vår målfunktion $P(K,L)=CK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ är kontinuerlig. En sats garanterar då att både största och minsta värdet av P under detta bivillkor existerar. Eftersom $P(K,L)\geq 0$ och $P(0,L)=P(K,0)=0$, så måste minimum vara noll. Vårt maximum är alltså en inre punkt på sträckan $K+L=A,\ K\geq 0,\ L\geq 0$. Enligt satsen om bivillkorsoptimering är denna punkt en lösning till ekvationssystemet
$$\begin{cases} \nabla P \ \text{ och } \ \nabla g \ \text{ är linjärt beroende} \\ g=K+L-A=0 \end{cases}$$
Eftersom $\nabla g=(1,1)$ och $\nabla P=(C\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha},CK^{\alpha}(1-\alpha)L^{-\alpha})=CK^{\alpha-1}L^{-\alpha}(\alpha L,(1-\alpha)K)$, så får systemet utseendet
$$\begin{cases} \alpha L &= (1-\alpha)K \\ K+L &= A \end{cases}$$
med lösningen $\mathbf{K}=\alpha\mathbf{A},\ \mathbf{L}=(\mathbf{1}-\alpha)\mathbf{A}$, vilket är vår maximipunkt.

5. **(I) Lösning med "derivering under integraltecknet"**
Om vi först antar att deriveringsoperatorn får flyttas in under integraltecknet, får vi:
$$F'_x(x,y)=\int_0^{\infty}-e^{-xt}\,dt=\left[\frac{e^{-xt}}{x}\right]_{t=0}^{t=\infty}=-\frac{1}{x}$$
$$F'_y(x,y)=\int_0^{\infty}e^{-yt}\,dt=\left[-\frac{e^{-yt}}{y}\right]_{t=0}^{t=\infty}=\frac{1}{y}$$
Av detta får vi att $F(x,y)=\ln y-\ln x+C$. Genom att sätta in $x=y$ i vår integral, ser vi att
$$0=\int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}-e^{-xt}}{t}\,dt=\ln x-\ln x+C,$$
dvs $C=0$. Vi har fått $F(x,y)=\ln\frac{y}{x}$.

Vi ska nu rättfärdiggöra våra deriveringar innanför integraltecknet. Enligt sats 3 i kapitel 5 ska vi kolla om

1) Vår integral är konvergent för alla $x>0$ respektive $y>0$.
Nära $t=0$ är integranden approximativt lika med $y-x$ (Taylorutveckla: $e^{-xt}=1-xt+\ldots$), så där har vi inget problem. För $1\leq t<\infty$ är integrandens termer begränsade av e^{-xt} respektive e^{-yt}, så genom jämförelsekriteriet är både $\int_1^{\infty}\frac{e^{-xt}}{t}\,dt$ och $\int_1^{\infty}\frac{e^{-yt}}{t}\,dt$ konvergenta var för sig (och hela integralen är absolutkonvergent).

2) Integranden $f(t,x,y)$ och dess partiella x- och y-derivator är kontinuerliga för $x>0,\ y>0$ och $0\leq t<\infty$.
Detta är tydligt med x och y, bara fallet $t=0$ kan vålla problem, men där har vi ju vår Taylorapproximation som verifierar kontinuiteten.

3) Vi ska vi hitta en majorant $g(t)$ med konvergent integral för $|f'_x|=e^{-xt}$ på varje x-intervall av typen $[a,b]$ med $0<a<b<\infty$. Då tar vi $g(t)=e^{-at}$, som ju har en konvergent integral. Precis likadant för y-derivatan.

Dessa kontroller gör att vi vågar påstå att $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\ln\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}$.

(II) Lösning med generaliserad dubbelintegral

Vi kan uppfatta integranden som resultatet av en integration, och därmed blir vår integral en upprepad enkelintegral. Den kan skrivas om som en dubbelintegral och sedan med framgång integreras i omvänd ordning:

$$F(x,y)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}-e^{-yt}}{t}\,dt=\int_0^{\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{t}\right]_{s=x}^{s=y}dt=\int_0^{\infty}dt\int_x^y e^{-st}\,ds=\int_x^y ds\int_0^{\infty}e^{-st}\,dt=$$
$$=\int_x^y\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_{t=0}^{t=\infty}ds=\int_x^y\frac{1}{s}\,ds=\ln\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}$$
Vi fick kasta om integrationsordningen eftersom de upprepade integralerna är absolutkonvergenta.

6. Se läroboken kapitel 9!

7. (a) se läroboken kapitel 4!

   (b) Vi kräver att $F(x,y)$ ska vara $\mathcal{C}^k$ och att $F'_y(a,b) \neq 0$, där $F(a,b) = C$. Då ska det finnas en omgivning till (a,b) där ekvationen $F(x,y) = C$ definierar y som en $\mathcal{C}^k$-funktion f av x. För beräkning av högre derivator deriverar man ekvationen $F(x, f(x)) = C$ upprepade gånger.

   Motivering/bevis: Att funktionen $f \in \mathcal{C}^1$ existerar lokalt säkerställs av implicita funkltionssatsen i sin vanliga form. Vid derivering får man

$$F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x))f'(x) = 0$$

   Om vi byter ut $f'(x)$ mot variabeln y, så har vi en ekvation

$$G(x,y) = F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x))y = 0$$

   Om $F \in \mathcal{C}^k$ (med $k \geq 2$), så kan vi tillämpa implicita funktionssatsen på ekvationen $G(x,y) = 0$, där $G \in \mathcal{C}^1$ och $G'_y(a, f'(a)) = F'_y(a, f(a)) \neq 0$. Den lösning y som funktion av x som nu utlovas, måste ju vara identisk med $f'(x)$, så den blir $\mathcal{C}^1$ och

$$G'_x(x, f'(x)) + G'_y(x, f'(x))f''(x) = 0$$

   så vi har fått fram en andraderivata av f. Detta kan upprepas rekursivt för varje derivata upp till ordning k.

   Variant: Om man löser ut f' ur den första deriverade ekvationen, så får man ju

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

   Om F har andraderivator och $F'_y(a, f(a)) \neq 0$, så förstår man att kvotregeln producerar en andraderivata $f''(x)$ som är OK (alla ingående derivator finns och nämnaren $(F'_y(a, f(a)))^2$ är skild från noll). Då har man fixat fallet $k = 2$. Om villkoret på F tillåter att vi deriverar fler gånger, får vi ett allt risigare uttryck, men även nu kan vi förstå att nämnaren är nollskild (den utgörs av allt högre potenser av $F'_y(a, f(a))$).