Tentamen i Flervariabelanalys F/TM, MVE035

2015 04 14 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.

Telefon: Anders Martinsson, 0703-088304

För godkänt krävs minst 20 poäng.

Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40 poäng eller mera. Bonuspoäng från 2015 ingår.

Lösningar kommer på kursens hemsida: http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve035/1415

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

Examinator: Lennart Falk.

---

1. (a) Beräkna riktningsderivatan av $f(x,y) = xy + \ln(x^2+y^2)$ i punkten $(1,2)$ i den riktning i vilken f växer snabbast. (2p)

   (b) Bestäm de stationära punkterna till $f(x,y) = x^2 + y^3 - 3y$ och avgör deras karaktär. (3p)

   (c) För den vektorvärda funktionen $(u,v) = \boldsymbol{f}(x,y)$ gäller att $\boldsymbol{f}(1,2) = (2,-1)$ och att $\boldsymbol{f}'(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Förklara varför $\boldsymbol{f}$ är lokalt inverterbar kring $(1,2)$ och beräkna $(\boldsymbol{f}^{-1})'(2,-1)$. (2p)

   (d) Arean av ytan $x^4 + y^4 + z = 1,\ z \geq 0$, kan uttryckas som en integral $\iint_D f(x,y)\,dxdy$. Bestäm $f(x,y)$ och D (men beräkna inte arean). (3p)

2. Utred om funktionen $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{om} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{om} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (1): har partiella derivator i $(0,0)$, (2): är differentierbar i $(0,0)$ och (3): tillhör $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. (4p)

3. Transformera den partiella diffentialekvationen $xf'_x + yf'_y = x + y$ till de nya variablerna $u = x/y,\ v = y$ (vi betraktar området $y > 0$). Bestäm sedan den lösning $f(x,y)$ som uppfyller villkoret $f(x,1) = x^2 + x + 1$. (6p)

4. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma (2x - y + 1)\,dx + (x + 3y + 2)\,dy$ där γ är ellipsbågen $4x^2 + y^2 = 4$ från $(-1,0)$ till $(1,0)$ i övre halvplanet ($y \geq 0$). (6p)

5. Beräkna $\iint_Y \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N}\,dS$, där $Y = \{(x,y,z) : z = x^2 + y^2,\ \ z \leq 1\}$ med uppåtriktad normal, och $\boldsymbol{F} = (e^y + xz,\ y^2 - x,\ z - 2yz)$. (6p)

6. Två kurvor γ_1 och γ_2 som saknar gemensamma punkter, har ekvationerna $u(x,y) = 0$ respektive $v(x,y) = 0$, där u och v är $\mathcal{C}^1$-funktioner vilkas gradienter överallt på kurvorna är $\neq \mathbf{0}$. Låt nu $P \in \gamma_1$ och $Q \in \gamma_2$ vara ett par av punkter som minimerar avståndet mellan kurvorna. Bevisa att linjen mellan P och Q är vinkelrät mot γ_1 i P och mot γ_2 i Q. (6p)

7. Bevisa att om en funktion $f(x,y)$ är kontinuerlig på en kompakt rektangel R, så är f integrerbar på R. (6p)

8. (a) Definiera begreppen *konservativt fält* och *potential*. (2p)

   (b) Formulera och bevisa satsen om att kurvintegralen av ett konservativt fält är en potentialdifferens. (4p)

Kortfattade lösningar till tentan MVE035 2015-04-14

1. (a) Riktningsderivatan är störst i gradientens riktning och där är den $|\nabla f(1,2)| = |(\frac{12}{5}, \frac{9}{5})| = \mathbf{3}$

   (b) $\nabla f = (0,0) \iff (2x, 3y^2 - 3) = (0,0)$. Detta ger de stationära punkterna $(0, \pm 1)$. Den kvadratiska formen i Taylorutvecklingen blir $\frac{1}{2}(f''_{xx}h^2 + 2f''_{xy}hk + f''_{yy}k^2)$, vilket i $(0,1)$ är $h^2 + 3k^2$ och i $(0,-1)$ är det $h^2 - 3k^2$. Den förra är positivt definit, den senare är indefinit ($Q(1,0) > 0,\ Q(0,1) < 0$). Så $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ är en **lokal minimipunkt,** medan $(\mathbf{0}, -\mathbf{1})$ är en **sadelpunkt**.

   (c) Att det $\boldsymbol{f}'(1,2) = -2 \neq 0$ betyder enligt inversa funktionssatsen att $\boldsymbol{f}$ är lokalt inverterbar kring $(1,2)$. Då är

$$(\boldsymbol{f}^{-1})'(2,-1) = \boldsymbol{f}'(1,2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   (d) Om vi tar (x,y) som parametrar, får vi $\boldsymbol{r} = (x, y, 1 - x^4 - y^4)$. Då är parametermängden $\mathbf{D} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x^4} + \mathbf{y^4} \leq \mathbf{1}\}$ och integranden är $f(x,y) = |\boldsymbol{r}'_x \times \boldsymbol{r}'_y| = |(-f'_x, -f'_y, 1))| = \sqrt{\mathbf{16x^6 + 16y^6 + 1}}$

2. Eftersom $f(x,0) = 0$ och $f(0,y) = 0$, så **existerar de partiella derivatorna i origo och de är båda 0**. Villkoret för differentierbarhet i origo är att

$$f(h,k) - f(0,0) - f'_x(0,0)h - f'_y(0,0)k = \sqrt{h^2 + k^2}\rho(h,k)$$

där $\rho(0,0) \to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$. Vi får

$$\rho(h,k) = \frac{hk}{h^2 + k^2}$$

vilket saknar gränsvärde då $(h,k) \to (0,0)$, eftersom $\rho(h,0) = 0$ medan $\rho(h,h) = \frac{1}{2}$ (olika gränsvärden längs olika linjer genom origo). f är därmed **inte differentierbar**, och **inte heller $\mathcal{C}^1$**, eftersom den då enligt en sats skulle ha varit differentierbar.

3. Kedjeregeln ger, med $F(u,v) = f(x,y)$:

$$xF'_x + yf'_y = x(F'_u \frac{1}{y} + F'_v \cdot 0) + y(F'_u \frac{-x}{y^2} + F'_v \cdot 1) = yF'_v$$

vilket gör att vår PDE kan skrivas och lösas så här:

$$F'_v(u,v) = u + 1 \iff F(u,v) = uv + v + g(u) \iff f(x,y) = x + y + g(\frac{x}{y})$$

där g är en godtycklig $\mathcal{C}^1$-funktion. Villkoret $f(x,1) = x^2 + x + 1$ ger oss $g(x) = x^2$, så vår lösning är

$$\mathbf{f(x,y) = x + y + \frac{x^2}{y^2}}.$$

4. Om vi lägger till x-axeln från $(1,0)$ till $(-1,0)$, så har vi en sluten kurva, som är den negativt orienterade randen ∂D till en halv ellipsskiva D. Villkoren för Greens formel är uppfyllda med förstagradspolynom (men observera fel orientering!). Om den tillagda orienterade sträckan kallas L, så har vi

$$\int_\gamma Qdx+Qdy+\int_L Qdx+Qdy=\int_{\partial D} Pdx+Qdy=-\iint_D (Q'_x-P'_y)\,dxdy=-\iint_D 2\,dxdy=-2\frac{\pi ab}{2}=-2\pi$$

där $a=1$ och $b=2$ är ellipsens halvaxlar enligt formel $A=\pi ab$ för ellipsskivans area (räkna annars ut dubbelintegralen). Eftersom

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_1^{-1} P(x,0)\,dx=\int_1^{-1}(2x+1)\,dx=\int_1^{-1} 1\,dx=-2$$

så är vår integral $\mathbf{-2\pi+2}$.
Det är inte heller särskilt svårt att beräkna den direkt genom parametrisering av γ med elliptiskt polära koordinater.

5. Här kan vi använda Gauss sats (fältet är helt harmlöst), om vi lägger på ”locket” $Y_1=\{(x,y,1): x^2+y^2\le 1\}$. Då innesluts $K=\{(x,y,z): x^2+y^2\le z\le 1,\ x^2+y^2\le 1\}$ av ytan $Y\cup Y_1$. Eftersom Gauss sats förutsätter utåtriktad normal, får vi här byta tecken på trippelintegralen, så vi har (med *normal nedåt* i Y_1)

$$\iint_Y \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}\,dS+\iint_{Y_1}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}\,dS=\iint_{Y\cup Y_1}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}\,dS=-\iiint_K \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,dxdydz=-\iiint_K (z+1)\,dxdydz$$

och därmed, med $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$:

$$\iint_Y \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}\,dS=-\iiint_K (z+1)\,dxdydz-\iint_{Y\cup Y_1}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}\,dS=-\int_0^1 (z+1)\,dz\iint_{x^2+y^2\le z} 1\,dxdy-(-\iint_D (1-2y)\,dxdy)=$$

$$=-\int_0^1 (z+1)\pi z\,dz+\iint_D 1\,dxdy=-\pi\int_0^1 (z^2+z)\,dz+\pi=-\frac{5\pi}{6}+\pi=\frac{\pi}{\mathbf{6}}$$

Alternativ lösning: Även i denna uppgift kan man beräkna integralen direkt via parametrisering: Y kan parametriseras enligt $\boldsymbol{r}=(x,y,x^2+y^2)$, med $\boldsymbol{r}'_x\times\boldsymbol{r}'_y=(-2x,-2y,1)$. Denna parametrisering ger den föreskrivna orienteringen, så vi får:

$$\iint_Y \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}\,dS=\iint_D (e^y+x(x^2+y^2),y^2-x),(1-2y)(x^2+y^2))\cdot(-2x,-2y,1)\,dxdy=$$

$$=\iint_D (-2xe^y-2x^4-2x^2y^2-2y^3+2xy+x^2+y^2-2x^2y-2y^3)\,dxdy$$

Vi kastar bort de termer som av symmetriskäl integreras till noll:

$$\iint_Y \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}\,dS=\iint_D (-2x^4-2x^2y^2+x^2+y^2)\,dxdy=\iint_D (-2x^2(x^2+y^2)+x^2+y^2)\,dxdy=$$

$$=\iint_D (-(x^2+y^2)^2+x^2+y^2)\,dxdy=\ \text{(polära koordinater)}\ =2\pi\int_0^1 (-r^5+r^3)\,dxdy=\frac{\pi}{\mathbf{6}}$$

I den tredje likheten har utnyttjats att integralen av $2x^2(x^2+y^2)$ är densamma som integralen av $2y^2(x^2+y^2)$, så båda kan ersättas av $(x^2+y^2)(x^2+y^2)$.

6. Vi kan börja med att se punkten $P = (x_1, y_1)$ som lösning på problemet att minimera avståndet, eller lika gärna kvadraten av avståndet $f(x, y) = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$, från punkten $Q = (x_2, y_2)$ till kurvan γ_1. Eftersom f och u är C^1-funktioner och eftersom P är en inre punkt till definitionsmängderna för f och u, så vet vi av satsen för max/min under bivillkor att ∇f och ∇u är linjärt beroende i P. Då $\nabla u \neq \mathbf{0}$, måste därför $\nabla f = \lambda \nabla u$ för något $\lambda \neq 0$ ($P \neq Q$), dvs $2\vec{QP} = 2(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = \lambda \nabla u$. Då ∇u är normalvektor till nivåkurvan $u(x, y) = 0$ (alltså γ_1), så är även linjen PQ vinkelrät mot γ_1.
   Resonemanget gäller förstås också om vi byter till kurvan γ_2 och dess minimala avstånd till P. Så linjen PQ skär båda kurvorna vinkelrätt.

   Alternativt hade man kunnat sätta upp båda kurvorna som bivillkor, och då arbeta med fyra variabler (punkternas koordinater). Målfunktionen f tas som avståndet i kvadrat, och dess gradient blir en linjärkombination av ∇u och ∇v (om man tolkar u och v som funktioner av alla fyra variablerna):

$$\nabla f = (2(x_1 - x_2), 2(y_1 - y_2), -2(x_1 - x_2), -2(y_1 - y_2)) = \lambda_1 (u'_{x_1}, u'_{y_1}, 0, 0) + \lambda_2 (0, 0, v'_{x_2}, v'_{y_2})$$

   med samma slutsats.

7. Se läroboken kapitel 6!

8. Se läroboken kapitel 9!