Tentamen i Flervariabelanalys F/TM, MVE035

2015 08 25 kl. 14.00–18.00.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.

Telefon: Lennart Falk, 7723564

För godkänt krävs minst 20 poäng.

Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40 poäng eller mera. Bonuspoäng från 2015 ingår.

Lösningar kommer på kursens hemsida: http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve035/1415

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

Examinator: Lennart Falk.

---

1. (a) Vilken typ av stationär punkt har polynomet $x^2 + x^3 + 3y^2 - 2y^4 - 4xy + 5$ i origo? (2p)

   (b) Skriv den upprepade integralen $\int_0^1 dy \int_1^{e^y} f(x, y)\, dx$ i omvänd integrationsordning. (2p)

   (c) Skriv en integral som uttrycker arean av ytan $(x, y, z) = (u + v^2, u^2 + v, uv)$, $1 \le u \le 2,\ 1 \le v \le 3$. Beräkna den inte! (2p)

   (d) Den vektorvärda funktionen $\boldsymbol{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ x^2 + 3y \end{pmatrix}$ approximeras lokalt kring $(x, y) = (1, 2)$ enligt $\boldsymbol{f}(1 + h, 2 + k) \approx \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$.
   Bestäm konstanterna a, b, c, d, e, f. (2p)

2. (a) Beräkna rotationen av fältet $\boldsymbol{F} = (\sin(y - z), y + x\cos(y - z), -x\cos(y - z))$. (2p)

   (b) Beräkna $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$, då C är räta linjen från $(\pi, \pi/2, \pi/2)$ till $(2\pi, \pi/2, 0)$. (4p)

3. Beräkna trippelintegralen
$$\iiint_D \frac{1}{z\sqrt{y^2 + xy - 2x^2}}\, dxdydz$$
där $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \le z \le 2(x^2 + y^2),\ 0 \le y - x \le 1,\ 0 \le y + 2x \le 1\}$. (6p)

4. Bestäm de punkter på kurvan $x^4 + x^2y^2 + 2y^4 = 14$ som har störst respektive minst avstånd till origo. Motivera först existensen av sådana punkter. (6p)

5. Beräkna flödet av fältet $\dfrac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ genom ellipsoidytan $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ i riktning utåt, sett från origo. (6p)

6. Lös den partiella differentialekvationen
$$3x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (x > 0,\ y > 0)$$
genom att göra variabelbytet $s = xy,\ t = x^2y^3$. (6p)

7. Använd definitionen av riktningsderivata för att bevisa den formel man använder för att beräkna riktningsderivatan av en differentierbar funktion med hjälp av gradienten. (4p)

8. (a) Formulera Greens formel och bevisa den under lämpliga förutsättningar (som i läroboken eller för en axelparallell rektangel). (6p)

   (b) Formulera Stokes sats. (2p)

Kortfattade lösningar till tentan MVE035 2015-08-25

1. (a) Den kvadratisk formen i Taylorutveckligen i origo är $h^2 - 4hk + 3k^2 = (h-2k)^2 - k^2$, som är indefinit. Då är origo en **sadelpunkt**.

   (b) $\int_0^1 dy \int_1^{e^y} f(x,y)\,dx = \int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{e}} \mathbf{dx} \int_{\ln \mathbf{x}}^{\mathbf{1}} \mathbf{f(x,y)}\,\mathbf{dy}$.

   (c) Arean är $\iint_D |\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v| = \iint_{[\mathbf{1},\mathbf{2}]\times[\mathbf{1},\mathbf{3}]} \sqrt{\mathbf{(2u^2-v)^2+(2v^2-u)^2+(1-4uv)^2}}\,\mathbf{du}\,\mathbf{dv}$.

   (d) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}(1,2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \boldsymbol{f'}(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. (a) Rotationen av fältet är $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = (0,0,0)$.

   (b) Därför finns en potential $U(x,y,z) = \frac{y^2}{2} + x\sin(y-z)$. Integralen beror bara på start och mål och är $U(2\pi, \pi/2, 0) - U(\pi, \pi/2, \pi/2) = \mathbf{2}\pi$.

3. Med $E = \{(x,y) : 0 \le y - x \le 1,\ 0 \le y + 2x \le 1\}$ har vi

$$I = \iiint_D \frac{1}{z\sqrt{y^2+xy-2x^2}}\,dxdydz = \iint_E \sqrt{y^2+xy-2x^2}\,dx\,dy \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} \frac{1}{z}\,dz =$$

$$= \ln 2 \iint_E \sqrt{y^2+xy-2x^2}\,dx\,dy$$

Vi gör ett variabelbyte: $u = y - x,\ v = y + 2x$, vilket ger integrationsmängden $E' = \{(u,v) = 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1\}$ och Jacobianen $J = -\frac{1}{3}$. Vi fortsätter i de nya variablerna:

$$I = \ln 2 \iint_{E'} \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{1}{3}\,du\,dv = \frac{\ln 2}{3}\Big[2\sqrt{u}\Big]_0^1 \Big[2\sqrt{v}\Big]_0^1 = \frac{\mathbf{4}\ln\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

4. Kurvan utgör en kompakt mängd i planet (man ser att $x^2 \le 14$ och $y^2 \le 7$, därav begränsningen). Den kontinuerliga funktionen $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ (avståndet i kvadrat) har då enligt sats både största och minsta värde på kurvan. Med $g(x,y) = x^4 + x^2y^2 + 2y^4 - 14$ kan vi uppfatta vårt problem som att bestämma max och min av f under bivillkoret $g = 0$. Alla punkter på kurvan är inre punkter till de båda funktionernas definitionsmängder. Då säger en sats att deras gradienter ska vara linjärt beroende i extrempunkterna, vilket i sin tur är ekvivalent med att

$$\frac{d(f,g)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 4x^3 + 2xy^2 & 2x^2y + 8y^3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4xy(3y^2 - x^2) = 0$$

Detta ger fallen $x = 0,\ y = 0,\ x^2 = 3y^3$, vilka vart och ett sätts in i bivillkoret. Vi får då de åtta punkterna $(0, \pm 7^{\frac{1}{4}}),\ (\pm 14^{\frac{1}{4}}, 0),\ (\pm\sqrt{3}, \pm 1)$. Dessa ger funktionsvärdena (avståndet i kvadrat) $f = \sqrt{7},\ f = \sqrt{14},\ f = \sqrt{16}$. Så vi har största avståndet $= 2$ i punkterna $(\pm\sqrt{3}, \pm 1)$ och minsta avståndet $= 7^{\frac{1}{4}}$ i punkterna $(0, \pm 7^{\frac{1}{4}})$.

5. Här kan vi inte använda Gauss sats på fältet $\boldsymbol{F}$ innanför ellipsoidytan, eftersom fältet är odefinierat i origo. Däremot kan vi avgränsa området inåt med enhetssfären. Så om vår ellipsoid med normal utåt kallas Y och enhetssfären med normal utåt kallas Z, så är ytan $Y \cup (-Z)$ randen till ett område D där fältet är $\mathcal{C}^1$ och där Gauss sats får användas (normalen för $-Z$ är ju ut från D). Då får vi, eftersom divergensen visar sig bli noll:

$$\iint_{Y \cup (-Z)} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} dS = \iiint_D \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}\, dx\, dy\, dz = 0$$

Samtidigt har vi:

$$\iint_{Y \cup (-Z)} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} dS = \iint_Y \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} dS - \iint_Z \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} dS = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\iint_Y \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} dS = \iint_Z \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} dS = \iint_Z (x, y, z) \cdot \boldsymbol{N} dS$$

(det sista eftersom nämnaren i fältet är 1 på Z). På den nya snällare integralen kan vi använda Gauss sats med $E =$ enhetsklotet:

$$= \iiint_E \boldsymbol{\nabla} \cdot (x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_E 3\, dx\, dy\, dz = 3\text{vol}(E) = \mathbf{4\pi}$$

6. Vi översätter till nya derivator med kedjeregeln:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s} y + \frac{\partial u}{\partial t} 2xy^3 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial s} x + \frac{\partial u}{\partial t} 3x^2y^2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} y + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} 2xy^3\Big) y + \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} y + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} 2xy^3\Big) 2xy^3 + \frac{\partial u}{\partial t} 2y^3$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} x + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} 3x^2y^2\Big) y + \frac{\partial u}{\partial s} + \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} x + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} 3x^2y^2\Big) 2xy^3 + \frac{\partial u}{\partial t} 6xy^2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} x + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} 3x^2y^2\Big) x + \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} x + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} 3x^2y^2\Big) 3x^2y^2 + \frac{\partial u}{\partial t} 6x^2y$$

Om man stuvar in detta i vår PDE (ordningen i blandade derivator är betydelselös för $\mathcal{C}^2$-lösningar) och får (efter att ha dividerat bort x- och y-faktorer, som ju är positiva)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} = 0$$

vilket ger

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h(t), \qquad u = f(s) + g(t)$$

Åter till ursprungliga koordinater:

$$\mathbf{u(x, y) = f(xy) + g(x^2y^3)}$$

med godtyckliga funktioner $f \in \mathcal{C}^2$ och $g \in \mathcal{C}^2$.

7. Se läroboken kapitel 2!

8. Se läroboken kapitel 9 och 10!