Tentamen
Linjär algebra och geometri, TMA660

140113 kl. 08.30–12.30

Examinator: Iulia Pop, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Cornelia Jareteg, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa

Betygsgränserna är följande: betyg 3 (24 poäng), betyg 4 (36 poäng), betyg 5 (48 poäng). För att få maximalt poäng krävs kompletta detaljerade lösningar. Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast första vardagen efter tentamen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

1. Bestäm rang, nolldimension, baser till kolonnrummet, respektive nollrummet till matrisen (8p)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. (i) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ b & a & a & a \\ 0 & b & a & a \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}$. (2p)

(ii) Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Lös ekvationssystemet (6p)

$$\begin{aligned} AX + Y &= A \\ X + AY &= A + I \end{aligned}$$

där X och Y är obekanta 3×3 matriser.

3. Linjen l_1 är skärningen mellan planen $x - y + z = 0$ och $2x + y - z + 3 = 0$. Linjen l_2 går genom punkterna $(2, 0, 1)$ och $(-1, 3, 2)$. Bestäm kortaste avståndet mellan linjerna. (8p)

4. En triangel har hörnen $P_0(1, 1, -1)$, $P_1(-1, 1, 1)$, $P_2(1, -1, 1)$. En linjär avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avbildar P_0 på P_1, P_1 på P_2 och P_2 på P_0. Bestäm avbildningens matris m.a.p. den kanoniska basen till $\mathbb{R}^3$. Vilka punkter inom triangeln avbildas på sig själva? (6p)

5. Låt e_1, e_2, e_3 vara en HON-bas i $\mathbb{R}^3$. En ny HON-bas $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ är sådan att $\hat{e}_3$ är ortogonal mot planet $x - y - z = 3$ och $\hat{e}_1$ är parallell med planet $x + y + 2z = 5$. Bestäm en sådan bas $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ och ange koordinaterna för $(1, 1, 1)$ i denna bas. (8p)

6. Låt A vara en $m \times n$ matris med $m < n$. Visa att $\det(A^T A) = 0$. (6p)

7. (i) Vad betyder att en linjär avbildning $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är isometrisk? (1p)

(ii) Visa att om F är linjär och isometrisk, så gäller $F(\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, för alla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. (3p)

(iii) Vad betyder att en kvadratisk matris är ortogonal? (1p)

(iv) Antag att avbildningsmatrisen A till F är ortogonal. Visa att F är isometrisk. (3p)

8. (i) Bevisa projektionsformeln för den ortogonala projektionen av en vektor på en annan. (4p)

(ii) Bevisa avståndsformeln för avståndet mellan en punkt och ett plan. (4p)

Lycka till!
Iulia Pop

Lösningar till tentamen 140113

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 & -1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} +1 & -1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{antalet pivot} = 3 \\ \text{rang } A = 3 \\ \text{nolldim } A = 5-3 = 2 \end{array}}.$$

$$\boxed{\text{Kol } A \text{ har bas } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Noll A:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_3 = t, \quad x_5 = s \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = t+s \\ x_2 = -t-3s \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \\ x_5 = s \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{Noll}A = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$$

(också l. oberoende) alltså bas

2. (i)

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ b & a & a & a \\ 0 & b & a & a \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a-b & a-b & a-b \\ 0 & b & a & a \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} = a\cdot(a-b)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & a \\ 0 & b & a \end{vmatrix} =$$

$$= a(a-b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a-b & a-b \\ 0 & b & a \end{vmatrix} = a(a-b)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & a \end{vmatrix} = \boxed{a(a-b)^3}.$$

(ii) $Y = A - AX \Rightarrow X + A(A - AX) = A + I \iff (I - A^2)X = A - A^2 + I.$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow I - A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) -2 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) 2 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow (I - A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - A^2 + I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad X = (I - A^2)^{-1}(A - A^2 + I) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$Y = A - AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

(3) $l_1: \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y-z+3=0 \end{cases}$ har riktningen $\overline{v_1} \parallel \overline{n_1} \times \overline{n_2}$ där $\overline{n_1} = (1,-1,1)$, $\overline{n_2} = (2,1,-1)$

$$\overline{n_1} \times \overline{n_2} = \begin{vmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\overline{e_2} + 3\overline{e_3} = (0,3,3).$$ Välj $\overline{v_1} = (0,1,1)$.

Linjen l_2 har riktningen $\overline{v_2} = (-1,3,2) - (2,0,1) = (-3,3,1)$.

Planet genom l_1 parallell med l_2 har normalen $\overline{v_1} \times \overline{v_2} = \begin{vmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3} \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$
$= -2\overline{e_1} - 3\overline{e_2} + 3\overline{e_3} = (-2,-3,3)$.

Planet π går dessutom genom $P_1(-1,0,1)$, en punkt på l_1. Då får man planets ekvation: $-2(x+1) - 3(y-0) + 3(z-1) = 0 \iff \underline{-2x-3y+3z-5=0}$.

Avståndet mellan linjerna är avståndet$((2,0,1), \pi) = \dfrac{|-4+3-5|}{\sqrt{4+9+9}} = \boxed{\dfrac{6}{\sqrt{22}}}$.

(4) $T(1,1,-1) = (-1,1,1)$
$T(-1,1,1) = (1,-1,1)$
$T(1,-1,1) = (1,1,-1)$

$$\iff \begin{cases} T(\overline{e_1}) + T(\overline{e_2}) - T(\overline{e_3}) = (-1,1,1) \\ -T(\overline{e_1}) + T(\overline{e_2}) + T(\overline{e_3}) = (1,-1,1) \\ T(\overline{e_1}) - T(\overline{e_2}) + T(\overline{e_3}) = (1,1,-1) \end{cases} \iff \begin{cases} T(\overline{e_1}) = (0,1,0) \\ T(\overline{e_2}) = (0,0,1) \\ T(\overline{e_3}) = (1,0,0) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ avbildningens matris är $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

Man får $T(x_1,x_2,x_3) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_3, x_1, x_2)$. $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3)$ omm $x_1 = x_2 = x_3$. Linjen $x_1 = x_2 = x_3$ skär triangelns plan $\pi: x_1 + x_2 + x_3 = 1$ i punkten $\boxed{Q\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}$, som är just tyngdspunkten av triangeln.

(5). $\hat{e}_3$ ortogonal mot planet $x-y-z=3 \Rightarrow \hat{e}_3 \parallel (1,-1,-1)$. Sätt $\hat{e}_3 = \dfrac{(1,-1,-1)}{|(1,-1,-1)|} \Rightarrow$
$\boxed{\hat{e}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)}$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Eftersom } \hat{e}_1 \perp \hat{e}_3 \Rightarrow \hat{e}_1 \perp (1,-1,-1). \\ \text{Eftersom } \hat{e}_1 \parallel \text{planet } x+y+2z=5 \Rightarrow \hat{e}_1 \perp (1,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{e}_1 \parallel (1,-1,-1) \times (1,1,2).$$

$$(1,-1,-1) \times (1,1,2) = \begin{vmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\overline{e_1} - 3\overline{e_2} + 2\overline{e_3}.$$ Sätt $\boxed{\hat{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(1,3,-2)}$

$\Rightarrow \boxed{\hat{e}_2 = \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{42}}(5,1,4)}$.

Koordinaterna av $\overline{u} = (1,1,1)$ i den nya basen ges av:

$\bar{u}\cdot\hat{e}_1 = \frac{2}{\sqrt{14}}$; $\bar{u}\cdot\hat{e}_2 = \frac{10}{\sqrt{42}}$; $\bar{u}\cdot\hat{e}_3 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\bar{u} = \frac{2}{\sqrt{14}}\hat{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{e}_3 + \frac{10}{\sqrt{42}}\hat{e}_2}$

(6). Ekvationen $A\bar{x} = \bar{0}$ har icke-trivial lösning eftersom antalet ekvationer är mindre än antalet obekanta (eller kolonnerna till A måste vara linjärt beroende p.g.a. n vektorer i $\mathbb{R}^m$ (och $n > m$) är linjärt beroende). Då får man att ekvationen $A^TA\bar{x} = A^T\bar{0} = \bar{0}$ har en icke-trivial lösning. Matrisen A^TA är kvadratisk. Då kan A^TA inte vara inverterbar $\Rightarrow \det(A^TA) = 0$.

(7) Se kursboken Sats 3 (s. 174-175).

(8) Se kursboken Sats 1 (s. 65) och Sats 6 (s. 77-78).