MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Tentamensskrivning i Inledande Matematisk Analys (TMA970), F1, den 12/1 2000, kl 14.15-18.15 (MG).
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Anders Logg, 0740 - 45 90 22.

OBS! Angiv namn, personnummer, linje och inskrivningsår.

---

1) Sök reella lösningar till ekvationen $2|x-1|+3|x+2| = 5-4x$. (7p)

2) Beräkna a) $\int_0^{\pi/4} x\cos(2x)dx$, (4p)

b) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^3-x}$. (5p)

3) Beräkna (exakta) värdet av $\arctan\frac{3}{2} + \arctan 5$. (7p)

4) Studera kurvan $y = \frac{x^2}{8} - \ln x$, $1 \leq x \leq 2$. Beräkna

a) längden av kurvan, (4p)

b) arean av den rotationsyta, som erhålles då kurvan roterar (ett varv) kring y-axeln. (4p)

5) Bestäm inversa funktionen till $f(x) = \tanh x$, med angivande av definitions- och värdemängd. (6p)

6) Bestäm (om möjligt) konstanter A,B,C,D,E och F, så att

$$\sum_{k=3}^{n} k^4 = An^5 + Bn^4 + Cn^3 + Dn^2 + En + F .$$ (7p)

7) Definiera begreppet derivata, samt formulera och bevisa differentialkalkylens medelvärdessats, (dvs. Lagranges sats inklusive Rolles sats). (8p)

8) Definiera begreppet gränsvärde, samt formulera och bevisa en sats om gränsvärdet för en sammansatt funktion, $\lim_{x \to x_0} f(g(x))$. (8p)

/RP

Inledande Matematisk Analys, F1, 12/1 2000 (1)

1) $2|x-1|+3|x+2| = 5-4x$

Brytpunkter: $x=1$ och $x=-2$

$$VL = \begin{cases} 2(x-1)+3(x+2) \equiv 5x+4 & \text{för } x \geq 1 \\ -2(x-1)+3(x+2) \equiv x+8 & \text{för } -2<x<1 \\ -2(x-1)-3(x+2) \equiv -5x-4 & \text{för } x \leq -2 \end{cases}$$

Fall 1: Om $x \geq 1$ fås ekv $5x+4 = 5-4x$

$\Leftrightarrow 9x = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{9}$ (falsk rot) (ty $x_1 < 1$).

Fall 2: Om $-2<x<1$ fås ekv $x+8 = 5-4x$

$\Leftrightarrow 5x = -3 \Rightarrow x_2 = -\frac{3}{5}$ (äkta rot, ty $-2 < x_2 < 1$)

Fall 3: Om $x \leq -2$ fås ekv $-5x-4 = 5-4x$

$\Leftrightarrow -x = 9 \Rightarrow x_3 = -9$ (äkta rot, ty $x_3 < -2$)

Svar: $x = -3/5$ eller $x = -9$

2a) $$\int_0^{\pi/4} x \cdot \cos(2x)\,dx = \left[\begin{matrix}\text{Part.}\\ \text{int.}\end{matrix}\right] = \left[x \cdot \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} 1 \cdot \frac{\sin 2x}{2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2} - 0 + \left[\frac{\cos 2x}{4}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} + \frac{0-1}{4} = \frac{\pi-2}{8}$$ (Svar)

b) Prim. funkt: $$F(x) = \int \frac{dx}{x^3-x} = \int \frac{1\,dx}{x(x-1)(x+1)} = \left(\begin{matrix}\text{Partial-}\\ \text{bråk}\end{matrix}\right)$$

$$= \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1}\right)dx = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| \equiv$$

$$\equiv \left[\text{Slå ihop logaritmer}\right] \equiv \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2}\right| \ (+C)$$

$$\therefore I = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^3-x} = \underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x^2-1}{x^2}\right)}_{=0} - \frac{1}{2}\ln\frac{4-1}{4} = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$$ (Svar)

3) $\arctan\frac{3}{2} + \arctan 5 \equiv \alpha + \beta$.

Sätt $\left| \begin{array}{l} \alpha = \arctan\frac{3}{2} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{3}{2},\ \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \beta = \arctan 5 \Rightarrow \tan\beta = 5,\ \frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$

Bilda (först) $\tan(\alpha+\beta) \equiv \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{\frac{3}{2}+5}{1-\frac{3}{2}\cdot 5} = -1$

$\therefore \tan(\alpha+\beta) = -1 \Rightarrow \underline{\alpha+\beta = -\frac{\pi}{4} + n\pi}$, där n = heltal

Men $\left| \begin{array}{l} \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \underline{\frac{\pi}{2} < \alpha+\beta < \pi}$ $\therefore n = 1$

<u>Svar:</u> $\alpha+\beta = \arctan\frac{3}{2} + \arctan 5 = \underline{\underline{\frac{3\pi}{4}}}$

---

4) a) Båglängd $L = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{x}\right)^2}\,dx$

$= \int_1^2 \sqrt{1+\frac{x^2}{16}-\frac{2x}{4x}+\frac{1}{x^2}}\,dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{x^2}{16}+\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}}\,dx =$

$= \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{x}{4}+\frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{x^2}{8}+\ln x\right]_1^2 =$

$= \left(\frac{4}{8}+\ln 2\right) - \left(\frac{1}{8}+\ln 1\right) = \underline{\underline{\frac{3}{8}+\ln 2}}$ (längdenh.)

b) Rot. area $A = \int_a^b 2\pi x \cdot ds = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$

$= \int_1^2 2\pi x\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{x}\right)dx = 2\pi \int_1^2 \left(\frac{x^2}{4}+1\right)dx =$

$= 2\pi \left[\frac{x^3}{12}+x\right]_1^2 = 2\pi\left(\frac{8-1}{12}+2-1\right) =$

$= 2\pi\left(\frac{7+12}{12}\right) = \underline{\underline{\frac{19\pi}{6}}}$ (areaenh.) (<u>Svar</u>)

(3)

5) $y = f(x) = \tanh x \equiv \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} \equiv \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

$\Leftrightarrow y(e^{2x}+1) = e^{2x}-1 \Leftrightarrow e^{2x} = \dfrac{1+y}{1-y}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\dfrac{1+y}{1-y} = f^{-1}(y)$ (Byt bokstäver!)

$\therefore$ Invers: $y = f^{-1}(x) = \underline{\frac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}}$ (för $-1 < x < 1$)

med $D_{f^{-1}} = V_f = \underline{]-1,1[}$ och $V_{f^{-1}} = D_f = \underline{]-\infty,\infty[}$

---

6) $S_n = \sum_{k=3}^{n} k^4 = An^5 + Bn^4 + Cn^3 + Dn^2 + En + F$

Bilda (på två sätt): 1) $S_{n+1} - S_n \equiv$

$\equiv \sum_{k=3}^{n+1} k^4 - \sum_{k=3}^{n} k^4 \equiv (n+1)^4 \equiv \underline{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1}$

och 2) $S_{n+1} - S_n = A[(n+1)^5 - n^5] + B[(n+1)^4 - n^4] +$

$+ C[(n+1)^3 - n^3] + D[(n+1)^2 - n^2] + E[n+1-n] + F(1-1)$

$\equiv A[n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n^5] +$

$+ B[n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - n^4] + C[n^3 + 3n^2 + 3n$

$+ 1 - n^3] + D[n^2 + 2n + 1 - n^2] + E$. Koeffidentgen

$n^4: 1 = 5A$

$n^3: 4 = 10A + 4B$

$n^2: 6 = 10A + 6B + 3C$

$n^1: 4 = 5A + 4B + 3C + 2D$

$n^0: 1 = A + B + C + D + E$

$\Longrightarrow$ $\underline{A = \frac{1}{5}}$, $\underline{B = \frac{1}{2}}$, $\underline{C = \frac{1}{3}}$, $\underline{D = 0}$, $\underline{E = -\frac{1}{30}}$

(Svar:)

Slutligen fås (för $n=3$) $\underline{F} = 3^4 - A\cdot3^5 - B\cdot3^4 - C\cdot3^3 - D3^2 - E\cdot3 = \underline{-17}$

Bevis: Induktion! (Klar enligt ovan.)

RP