

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1

Datum: 2003-08-18, kl. 8.45-12.45.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefon: Elin Götmark, tel. 0740-459022.

OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

=====

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

(a) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^7} dx$; (b) $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}$; (c) $\int_2^\infty \frac{dx}{(\ln x)^4}$; (d) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$;
(e) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; (f) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$; (g) $\int_0^1 \frac{dx}{2x^2+x}$; (h) $\int_0^1 x^3 \ln x dx$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (utan att använda l'Hospitals regel)

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + x}}{2x - \sqrt{x^2 + x}}$; (4p)

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x \sin 2x}$. (5p)

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (7p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \frac{\sin 2x}{2 + \sin x - \cos^2 x}$. (6p)

(b) Beräkna $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$. (4p)

5. Beräkna längden av kurvbågen $y = \ln(\cos x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$. (6p)

6. Funktionen $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ och grafen till f ligger i vinkeln mellan de räta linjerna $y = kx$ och $y = -kx$ ($0 < k < \infty$) för alla x i intervallet $(0, \epsilon)$. Visa att $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{f(x)} = 1$. (6p)

7.(a) Definiera begreppet deriverbar funktion (i en punkt). (1p)

(b) Visa att om en funktion är deriverbar i en punkt, så är den kontinuerlig i samma punkt. Ge exempel som visar att det omvända förhållandet inte är sant. Motivera nog! (6p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats (valfri variant). (7p)

Svar till tentor i inledande matematisk analys F1, tma970, ht 06

03-01-14

1. **(a),(b)** konvergent; **(c),(d)** divergent; **(e),(f),(h)** falskt; **(g)** sant

2. **(a)** 1, **(b)** e^6 3. lok. max: 0, lok. min: $\frac{21}{5}$, inflex.pkt: $-\frac{1}{5}, 0$, grafen:

4. **(a)** $\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + x + c$ **(b)** $\frac{24\pi}{5}$



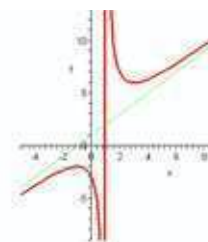
03-08-18

1. **(a),(b),(e),(f),(h)** konvergent; **(c),(d),(g)** divergent 2. **(a)** 3, **(b)** $\frac{3}{4}$

3. asymptoter: $x = 1, y = x + 1$, lok. max: -1 , lok. min: 3, grafen:

4. **(a)** $\ln(\sin^2 x + \sin x + 1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(\sin x + \frac{1}{2})\right)$ **(b)** π

5. $\ln(2 + \sqrt{3})$

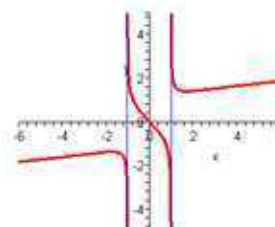


03-10-22

1. **(a),(d)** konvergent; **(b),(c)** divergent; **(f),(h)** deriverbar; **(e),(g)** ej deriverbar 2. **(a)** $\frac{1}{2}$ **(b)** -1 3. asymptoter: $x = \pm 1$,

lok. max: $-\sqrt{3}$, lok. min: $\sqrt{3}$, infl. pkt. $-3, 0, 3$, grafen:

4. **(a)** $6(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x}) + c$ **(b)** $\frac{\pi^2 - 8}{32}$



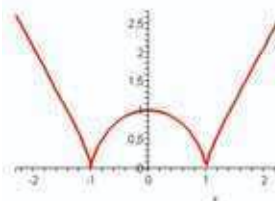
04-01-13

1. **(c),(d)** konvergent; **(a),(b)** divergent; **(e),(g)** finns; **(f),(h)** finns ej

2. **(a)** ex. ej **(b)** 0 3. lok.min: ± 1 , infl.pkt: $\pm \sqrt{3}$, grafen:

4. **(a)** $(x + \frac{1}{2})\ln(x^2 + x + 1) - 2x + \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$

(b) $\frac{1}{\sqrt{5}}(\arctan \frac{4}{\sqrt{5}} - \arctan \frac{1}{\sqrt{5}})$ 5. $\frac{16}{27}(10\sqrt{10} - 1)$



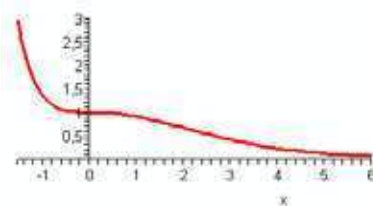
04-08-16

1. **(b),(d),(e),(f),(h)** konvergent; **(a),(c),(g)** divergent

2. **(a)** 1 **(b)** 1

3. asymptot: $y = 0$ i ∞ , infl.pkt: 0 och 2, grafen:

4. **(a)** $(\arctan \sqrt{x})^2$ **(b)** $\frac{\pi-2}{8}$



05-10-19

1. **(c)** falsk, övriga sanna 2. 0 3. **a)** f är deriverbar i alla punkter $x \neq 0$

b) lok. minimum i $x = -3 - 2\sqrt{2}$, maximum i 0, asymptot: $y = 0$

c)
$$F(x) = \begin{cases} 2\sqrt{-x} - \ln(1-x) - 2 \arctan \sqrt{-x} & \text{om } x < 0 \\ 2\sqrt{x} - 2 \ln(1+\sqrt{x}) & \text{om } x \geq 0 \end{cases}$$

4. **a)** $D_f = [0, \infty[$, f är strängt konvex, asymptot: $y = 0$

b) $\ln(3 + 2\sqrt{2})$

