

Tentamen i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2006-01-10, kl. 14.00-18.00 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,

Telefon: Johan Jansson och Peter Lindroth, tel. 0762 – 721860 och 0762 – 721861

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.

Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

1. Låt $f(x) = x^{\arctan x}$. Beräkna
 - a) $f'(1)$
 - b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ (enbart standardgränsvärden får användas). (6p)

2. Visa att $f(x) = x + \cos x$ är injektiv och beräkna $Df^{-1}(1)$ (derivatan av f^{-1} i punkten 1). (7p)
Ange även f 's inflexionspunkter.

3. Låt $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ och
 $D_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq f(x)\}$, $D_2 = \{(x, y) : \frac{3}{2} \leq x \leq 8, 0 \leq y \leq f(x)\}$.
 - a) Beräkna arean av området D_1 och arean av området D_2 . (3p)
 - b) Visa att D_1 och D_2 har lika stor area. (4p)

4. Bestäm a så att kedjelinjen $y = \cosh x, -a \leq x \leq a$ här längden 2 (längdenheter). (7p)

5. Låt $f(x) = \frac{32}{(x+2)^4 - 16}$.
 - a) Utveckla $(x+2)^4$ med hjälp av binomialteoremet. (2p)
 - b) Partialbråksuppdelning $f(x)$. (3p)
 - c) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av extrempunkter och asymptoter. (7p)
 - d) Motivera varför den generaliserade integralen $\int_1^{\infty} f(x) dx$ är konvergent
 - d1) utan att beräkna den (2p)
 - d2) genom att beräkna den (5p). (7p)

6. Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara deriverbar. Visa att om f antar ett lokalt extremvärde i en punkt x_0 så är $f'(x_0) = 0$. Gäller omvändningen? (7p)

7. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats för två funktioner. (7p)

Betygsgränser:

24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5

BB

Tentamen i inledande matematisk analys för F1 (tma970), 06-01-10

uppg. 1

$f(x) = x^{\arctan x} = e^{\arctan x \ln x} = e^{\frac{\arctan x}{x}(x \ln x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} e^{1 \cdot 0} = 1$ (standardgränsvärden och e^x är kontinuerlig) och $f'(x) = e^{\arctan x \ln x} \left(\frac{\arctan x}{x} + \frac{\ln x}{1+x^2} \right)$, alltså är $f'(1) = e^0 \left(\frac{\pi}{4} + 0 \right) = \frac{\pi}{4}$.

$$\boxed{\text{svar: a) } Df(1) = \frac{\pi}{4}, \text{ b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1}$$

uppg. 2

$f(x) = x + \cos x \implies f'(x) = 1 - \sin x > 0$ i alla intervall $\left] \frac{(4n+1)\pi}{2}, \frac{(4n+5)\pi}{2} \right[$, $n \in \mathbb{Z}$, alltså är f strängt växande i alla dessa intervall och därmed strängt växande, och således injektiv, på hela \mathbb{R} . $f(0) = 1$, alltså är $Df^{-1}(1) = \frac{1}{Df(0)} = 1$. Vidare är $x_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ [$n \in \mathbb{Z}$] lok. extrempunkter av f' alltså inflexionspunkter av f ($f''(x_n) = -\cos x_n = 0$, f'' byter tecken i x_n).

$$\boxed{\text{svar: } Df^{-1}(1) = 1, \frac{(2n+1)\pi}{2} [n \in \mathbb{Z}] \text{ är inflexionspunkter}}$$

upp. 3

Områdena har arean $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan \frac{1}{2}$ resp. $\int_{\frac{3}{2}}^8 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan 8 - \arctan \frac{3}{2}$.

Vi skall nu visa att $\arctan \frac{1}{2} = \arctan 8 - \arctan \frac{3}{2}$, dvs $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{3}{2} = \arctan 8$: sätt $\alpha = \arctan \frac{1}{2}$, $\beta = \arctan \frac{3}{2}$, då är $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ och $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$, det ger $\alpha + \beta = \arctan 4 + n\pi$; men eftersom $0 < \alpha + \beta < \pi$ så är $n = 0$ vsv.

upp. 4

Längden är $\int_{-a}^a \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_{-a}^a \sqrt{1 + \sinh^2(x)} dx =$ [jämn integrand]
 $= 2 \int_0^a \cosh x dx = 2 \sinh a \stackrel{!}{=} 2 \implies e^a - e^{-a} = 2 \implies (e^a)^2 - 2e^a - 1 =$

$$(e^a - 1)^2 - 2 = 0 \implies e^a = 1 + \sqrt{2} \quad [1 - \sqrt{2} < 0, \text{ alltså ej lösning}]$$

$$\implies a = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

$$\boxed{\text{svar: } a = \ln(1 + \sqrt{2})}$$

upp. 5

$$\text{a) } (x+2)^4 = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} x^{4-k} 2^k = x^4 + 4x^3 \cdot 2 + 6x^2 \cdot 4 + 4x \cdot 8 + 16 =$$

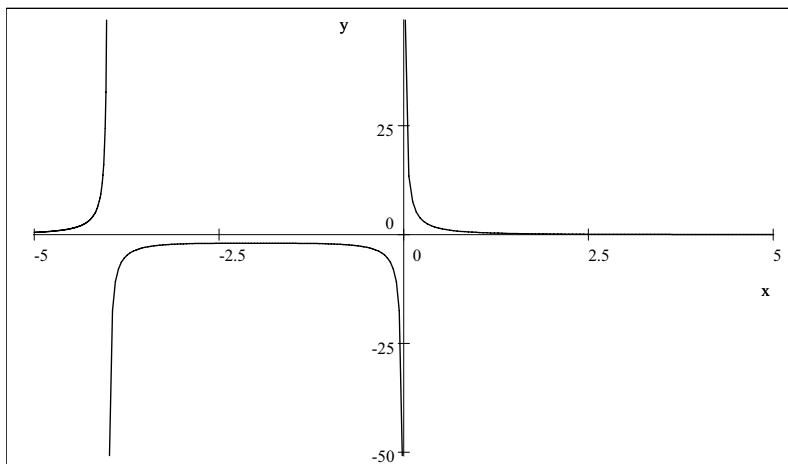
$$x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16.$$

$$\text{b) } \frac{32}{(x+2)^4 - 16} = \frac{32}{((x+2)^2 + 4) \cdot ((x+2)^2 - 4)} = 4 \left(\frac{1}{(x+2)^2 - 4} - \frac{1}{(x+2)^2 + 4} \right) =$$

$$= 4 \left(\frac{1}{(x+2+2)(x+2-2)} - \frac{1}{(x+2)^2 + 4} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} - \frac{4}{(x+2)^2 + 4}.$$

c) Man ser direkt (eller på partialbråksuppdelningen) att $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, -4\}$,
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 0+$, $x \rightarrow -4-$ och $f(x) \rightarrow -\infty$
då $x \rightarrow 0-$, $x \rightarrow -4+$, dvs $y = 0$, $x = -4$ och $x = 0$ är asymptoter.
 $f'(x) = 32 \frac{-4(x+2)^3}{((x+2)^4 - 16)^2} \begin{cases} > 0, & \text{då } x < -2 \\ < 0, & \text{då } x > -2 \end{cases}$, $f(-2) = -2$ är alltså ett strängt
lokalt maximum (globala max-min och sneda asymptoter saknas).

$$\boxed{\text{svar: asymptoter: } y = 0, x = -4, x = 0; \text{ lok. max. i } (-2, -2)}$$



$$\text{d) } \int_1^{\infty} \frac{32}{(x+2)^4 - 16} dx \text{ är konvergent, ty för } x \geq 1 \text{ är enligt a)}$$

$$0 \leq \frac{32}{(x+2)^4-16} = \frac{32}{x^4+8x^3+24x^2+32x} < \frac{32}{x^4} \text{ och } \int_1^{\infty} \frac{32}{x^4} dx \text{ är konvergent.}$$

$$\begin{aligned} \text{Beräkning: enligt b) är } & \int_1^{\infty} \frac{32}{(x+2)^4-16} dx = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} - \frac{1}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1} \right) dx = \\ & = [\ln x - \ln(x+4) - 2 \arctan \frac{x+2}{2}]_1^{\infty} = \\ & = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{N}{N+4} - 2 \arctan \frac{N+2}{2} \right) - \left(-\ln 5 - 2 \arctan \frac{3}{2} \right) = \underline{-\pi + \ln 5 + 2 \arctan \frac{3}{2}} \\ & \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{N}{N+4} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{1}{1+\frac{4}{N}} \right) = \ln 1 = 0 \right). \end{aligned}$$