

TMA970**Matematik Chalmers****Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM**

Datum: 2012-01-12, kl. 8:30 - 12:30.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Emil Gustavsson, tel. 070-3088304, besöker salen ca 9:30 och 11:30.

=====

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^9+1}} dx; \quad (b) \int_0^1 \frac{dx}{\sin \sqrt{x}}; \quad (c) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}; \quad (d) \int_1^2 \frac{x}{\cos x} dx.$$

Funktionen f i (e)–(h) är kontinuerlig och begränsad i intervallet $[0, \infty)$, samt uppfyller $f(x) \neq 0$ för alla $x \in [0, \infty)$. Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, d.v.s. sant / falskt.

(e) Funktionen f har ett största värde i $[0, \infty)$.

(f) Gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existerar (och är ändligt).

(g) Funktionen $\frac{1}{f}$ är begränsad i $[0, \infty)$.

(h) Funktionen f byter inte tecken i $[0, \infty)$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger $-1p$, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1-x^2})^{\frac{1}{x^4}} \quad (4p); \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{e^{2x^2} - \cos x} \quad (4p).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-1}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (7p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. (4p)

(b) Bestäm alla reella α sådana att integralen $\int_1^{\infty} \frac{\sin x^2}{x^\alpha} dx$ konvergerar. (4p)

5. Visa att $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$, för alla $x > 0$. (8p)

6. Låt a, b vara reella tal, sådana att $a < b$. Visa att ekvationen

$$\frac{1}{(x-a)^4} + \frac{2}{(x-b)^9} = 0,$$

har minst en lösning i intervallet (a, b) . (6p)

7.(a) Formulera satsen om invers funktions derivata. (2p)

(b) Härled derivatan av funktionen \arctan . (2p)

(c) Bevisa satsen om invers funktions derivata. (4p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats. (7p)

Betygsgränser: 24-35p ger betyget 3; 36-47p ger betyget 4; 48p+ ger betyget 5.

/JM

Inledande matematisk analys F/TMLösningar 12/1-2012

- ① (a) divergent ; (b) konvergent ;
 (c) konvergent ; (d) divergent ;
 (e) falskt ; (f) falskt ;
 (g) falskt ; (h) sant.

② (a) $(\sqrt{1-x^2})^{1/x^2} = e^{\frac{1}{x^2} \ln \sqrt{1-x^2}} =$
 $= e^{\frac{1}{2} \frac{\ln(1-x^2)}{-x^2} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot (-1)} \rightarrow "e^{-\infty}" = 0$
 (b) $\frac{\ln(\cos x)}{e^{2x^2} - \cos x}$ (1-x^2 > 0 for x nära 0)

$= \frac{\ln(1 + (\cos x - 1))}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{(e^{2x^2} - 1) - (\cos x - 1)} =$
 $= \frac{1}{\frac{e^{2x^2} - 1}{2x^2} \cdot \frac{2x^2}{\cos x - 1} - 1} \cdot \frac{\ln(1 + (\cos x - 1))}{\cos x - 1} =$

$= \frac{1}{\frac{e^{2x^2} - 1}{2x^2} \cdot \frac{2x^2}{\cos^2 x - 1} \cdot (\cos x + 1) - 1} \cdot \frac{\ln(1 + (\cos x - 1))}{\cos x - 1}$
 $\xrightarrow{\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x} \frac{1}{1 \cdot (-2) \cdot 2 - 1} \cdot 1 = -\frac{1}{5}$

3.

$$D_f : x \neq 1$$

$$f = 0 \quad \text{omn} \quad x = -1$$

$$f > 0 \quad \forall x \in (1, \infty)$$

$$f < 0 \quad \forall x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1)$$

ej jämn / udda, ej periodisk,
inga symmetrier

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty} \quad ???$$

$$\frac{(x+1)^2}{x-1} = \frac{x^2(1+\frac{1}{x})^2}{x(1-\frac{1}{x})} \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \frac{4}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \frac{4}{+0} = +\infty$$

} $\Rightarrow x=1$
vertical asymptot

I $\pm \infty$?

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{(x+1)^2}{x^2-x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} 1$$

$$f(x) - x = \frac{x^2+2x+1}{x-1} - x = \frac{x^2+2x+1-x^2+x}{x-1} =$$

$$= \frac{3x+1}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} 3$$

$\Rightarrow y = x+3$ sned asymptot i $\pm \infty$

$$f'(x) = \frac{2(x+1) \cdot (x-1) - (x+1)^2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2 - x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$$

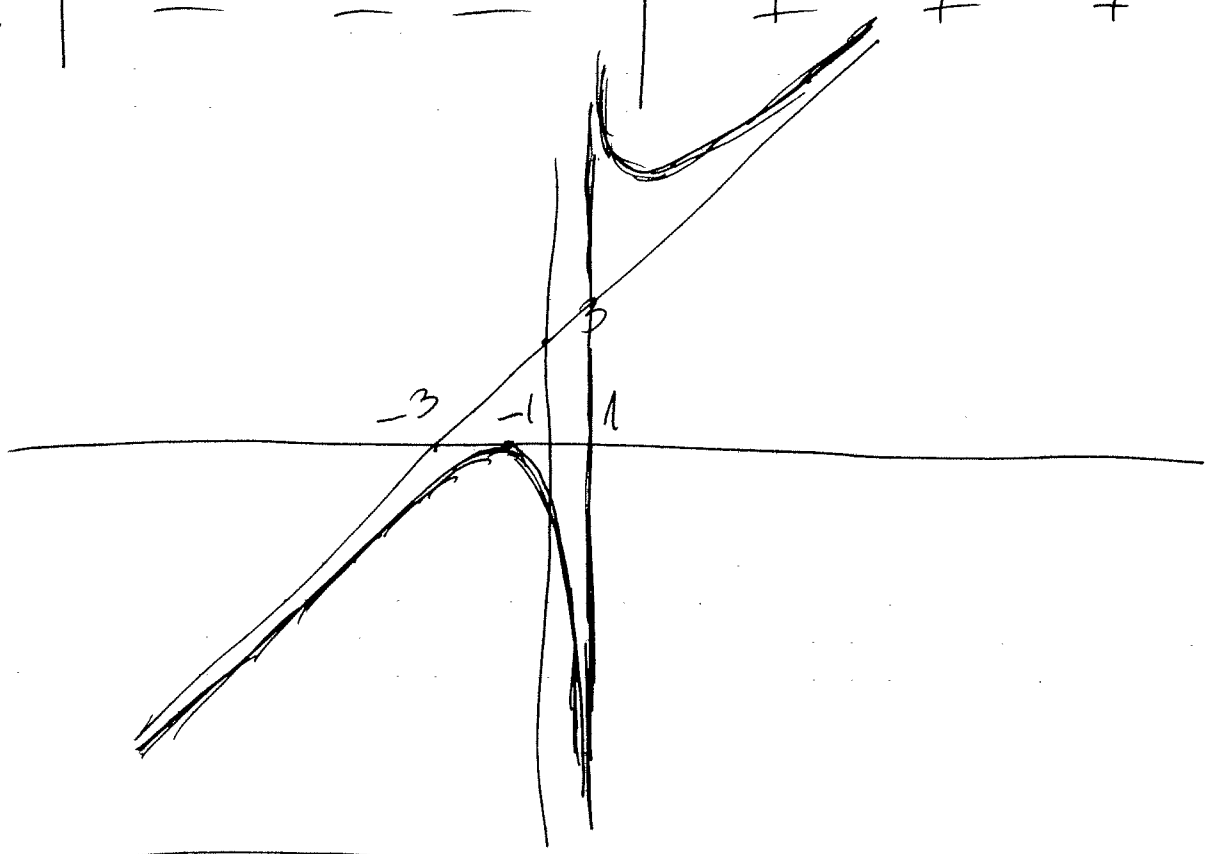
(bättre att byta ut $(x+1)$)

x	-1	1	3
f''	$+$	0	$-$
	$f: \text{lok. max}$		$f: \text{lok. min}$

3 

$f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3} \neq 0 \Rightarrow$ mga inflexionsytkes

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
f	$y=x+3$ $-\infty$	\nearrow lok. max 0	$-\infty$	\searrow lok. min 8	\nearrow $y=x+3$ $+\infty$
f'	$+$	$+$	0	$-$	$+$
f''	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$



4. (a) $\int \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = x \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \int x \cdot \frac{1}{1 + \frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} dx =$

$= x \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \int x \cdot \frac{1-x}{2} \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} dx =$

$$\begin{aligned}
 &= x \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \triangle 4 \\
 &= x \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{1}{4} \cdot 2 \int \frac{((1-x^2))'}{2\sqrt{1-x^2}} dx = \\
 &= x \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} \quad (+C)
 \end{aligned}$$

$$(b) \int_1^{\infty} \frac{\sin x^2}{x^{\alpha}} dx = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_1^p \frac{\sin x^2}{x^{\alpha}} dx$$

$$\begin{aligned}
 \int_1^p \frac{\sin x^2}{x^{\alpha}} dx &= \frac{1}{2} \int_1^{p^2} \frac{2x \sin x^2}{x^{\tilde{\alpha}}} dx = \int_{t=x^2}^{t=p^2} \frac{\sin t}{t^{\tilde{\alpha}/2}} dt \quad \left[\begin{array}{l} t=x^2 \\ dt=2x dx \end{array} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^{p^2} \frac{\sin t}{t^{\tilde{\alpha}/2}} dt \quad (\tilde{\alpha} = \alpha + 1) \quad (p^2 \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

$\frac{2}{\tilde{\alpha}} > 1 \Leftrightarrow \tilde{\alpha} > 2$: $\left| \frac{\sin t}{t^{\tilde{\alpha}/2}} \right| \leq \frac{1}{t^{\tilde{\alpha}/2}}$
 \Rightarrow konvergent enl. jämförelsekriteriet

$$\int_1^{p^2} \frac{\sin t}{t^{\tilde{\alpha}/2}} dt = \left[\frac{-\cos t}{t^{\tilde{\alpha}/2}} \right]_1^{p^2} + \int_1^{p^2} \frac{\cos t \cdot (-\frac{\tilde{\alpha}}{2})}{t^{\frac{\tilde{\alpha}}{2}+1}} dt$$

$\left. \begin{array}{l} \tilde{\alpha} > 0 \\ \Leftrightarrow \alpha > -1 \end{array} \right\} \text{konv.}$
 $\left. \begin{array}{l} = \cos 1 - \frac{\cos p^2}{p^{\tilde{\alpha}}} \rightarrow 0 \\ \text{för } \tilde{\alpha} > 0 \end{array} \right\} p \rightarrow \infty$

$\left. \begin{array}{l} \tilde{\alpha} \leq 0 \\ \Leftrightarrow \alpha \leq -1 \end{array} \right\}$: divergent
 (potensen växer i täljaren) eller \sin / \cos

$(\alpha = 0)$: konvergent ; ej elementärt
 att visa det direkt (Fresnelintegral)
 $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$
 $\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$

⑤ $x=1 : 0=0=0$

③

$$f(x) = x - 1 - \ln x$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \geq 0 \quad \forall x \geq 1$$

$$f(1) = 0 \quad f \text{ växande i } [1, \infty)$$

$$\Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1, \infty)$$

$$\Rightarrow \ln x \leq x - 1 \quad \text{i } [1, \infty)$$

$$g(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \geq 0 \quad \text{i } [1, \infty)$$

$$g(1) = 0 \quad g \text{ växande i } [1, \infty)$$

$$\Rightarrow \ln x \geq 1 - \frac{1}{x} \quad \text{i } [1, \infty)$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \leq 0 \quad \text{i } (0, 1)$$

$$\Rightarrow g \text{ avtagande i } (0, 1)$$

$$g(1) = 0 \Rightarrow g \geq 0 \quad \text{i } (0, 1)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \leq 0 \quad \text{i } (0, 1)$$

$$\Rightarrow f \text{ avtagande i } (0, 1]$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow f \geq 0 \quad \text{i } (0, 1]$$

⑥ $f(x) = \frac{1}{(x-a)^q} + \frac{2}{(x-b)^q}$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \frac{1}{+0} + \text{ändligt tal} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \text{"ändligt tal"} + \frac{2}{-0} = -\infty \quad \triangle 6$$

f kontinuerlig

$$f(a+\varepsilon) > 0, \quad f(b-\varepsilon) < 0$$

för tillräckligt litet $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow f$ har nollställe i

$$(a+\varepsilon, b-\varepsilon) \subset (a, b),$$

enligt satsen om mellanliggande värde