

TMA970

Matematik Chalmers

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM

Datum: 2012-10-24, kl. 8:30 - 12:30.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Christoffer Standar, tel. 070-3088304, besöker salen ca 9:30 och 11:30.

=====

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

(a) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x+1}} dx$; (b) $\int_1^\infty \sin \frac{1}{x^2} dx$; (c) $\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}} dx$; (d) $\int_0^\infty \frac{x \ln x}{\sqrt{x^4+1}} dx$.

Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, sant/falskt.

(e) $\int_I f, \int_I g$ konvergenta $\Rightarrow \int_I (f+g)$ konvergent;

(f) $\int_I f, \int_I g$ divergenta $\Rightarrow \int_I (f+g)$ divergent;

(g) $\int_I f$ konvergent, $\int_I g$ divergent $\Rightarrow \int_I (f+g)$ konvergent;

(h) $\int_I f$ konvergent, $\int_I g$ divergent $\Rightarrow \int_I (f+g)$ divergent.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+3x+x})$ (4p); (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos x}{x \sin 2x}$ (4p).

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \ln \frac{1}{\cos x}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (7p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = x^2(\ln x)^2$. (4p)

(b) Beräkna $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$. (4p)

5. Bestäm definitionsmängd, gränsvärden och asymptoter för $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. (6p)

6.(a) Funktionen f är definierad **och kontinuerlig**¹ i intervallet (a, b) , och reellvärd. Givet att f är deriverbar i $(a, c) \cup (c, b)$, där $c \in (a, b)$, samt att gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow c} f'(x)$ finns, visa att f är deriverbar i punkten c , och $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} f'(x)$. (6p)

(b) Ge exempel som visar att f kan vara deriverbar i punkten c utan att $\lim_{x \rightarrow c} f'(x)$ existerar. (2p)

¹"kontinuerlig" fattades i tentan; missen upptäcktes av doktoranden som gick ronderna

- 7.(a)** Ge definitionen för att $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$. (2p)
- (b)** Visa med hjälp av definitionen att $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1$. (2p)
- (c)** Visa att om f är begränsad i en omgivning till x_0 , och om $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, så gäller $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$. (4p)
- 8.** Formulera och bevisa analysens huvudsats (även kallad integralkalkylens huvudsats, Newton-Leibniz sats). (7p)

Betygsgränser: 24-35p ger betyget 3; 36-47p ger betyget 4; 48p+ ger betyget 5.

/JM

TMA970 Inledande matematisk analys F/TM

Lösningar 24/10-12

- ① (a) konvergent ; (b) konvergent ;
 (c) konvergent ; (d) divergent ;
 (e) sant ; (f) falskt ;
 (g) falskt ; (h) sant .

② (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+3x} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+3x - x^2}{\sqrt{x^2+3x} - x}$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{(x)\sqrt{1+\frac{3}{x}} - x} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x(\sqrt{1+\frac{3}{x}} + 1)}$

ty $x < 0$ $= - \frac{3}{2}$

(b) $\frac{\sqrt{1+x^2} - \cos x}{x \sin 2x} = \frac{(\sqrt{1+x^2})^2 - \cos^2 x}{x \sin 2x (\sqrt{1+x^2} + \cos x)}$

$= \frac{1+x^2 - \cos^2 x}{x \sin 2x (\sqrt{1+x^2} + \cos x)} = \frac{\sin^2 x + x^2}{2x \sin x \cos x (\sqrt{1+x^2} + \cos x)}$

$= \frac{\cancel{\sin x}}{2x \cancel{\sin x} \cos x (\sqrt{1+x^2} + \cos x)} + \frac{\cancel{x}}{2x \cancel{\sin x} \cos x (\sqrt{1+x^2} + \cos x)}$

\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow
 1 1 2 1 1 2

$\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$

③ D_f : alla intervall, i ②
ritka $\cos x > 0$

$$\rightarrow \dots \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right) \cup \dots$$

$$f \text{ periodisk, ty } f(x+2\pi) = \\ = \ln \frac{1}{\cos(x+2\pi)} = \ln \frac{1}{\cos x} = f(x)$$

(period 2π)

$$f \text{ jämn, ty } f(-x) = \ln \frac{1}{\cos(-x)} = \\ = \ln \frac{1}{\cos x} = f(x)$$

\Rightarrow det räcker att rita grafen i intervallet $[0, \frac{\pi}{2})$; jämn \Rightarrow man kan per symmetri rita den i $(-\frac{\pi}{2}, 0)$; periodisk \Rightarrow man kan per periodicitet rita den i övriga intervall.

$$\frac{1}{\cos x} \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq 0 \\ (\text{från } = 0 = f(0))$$

$$f(x) = \ln \frac{1}{\cos x} = - \ln \cos x$$

globalt minimum

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\ln \cos x) = +\infty$$

\downarrow
 $-\infty$

\Rightarrow vertikal asymptot $x = \frac{\pi}{2}$
(samt $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$)
 $k \in \mathbb{Z}$

$$f'(x) = -\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = \tan x \quad \triangle 3$$

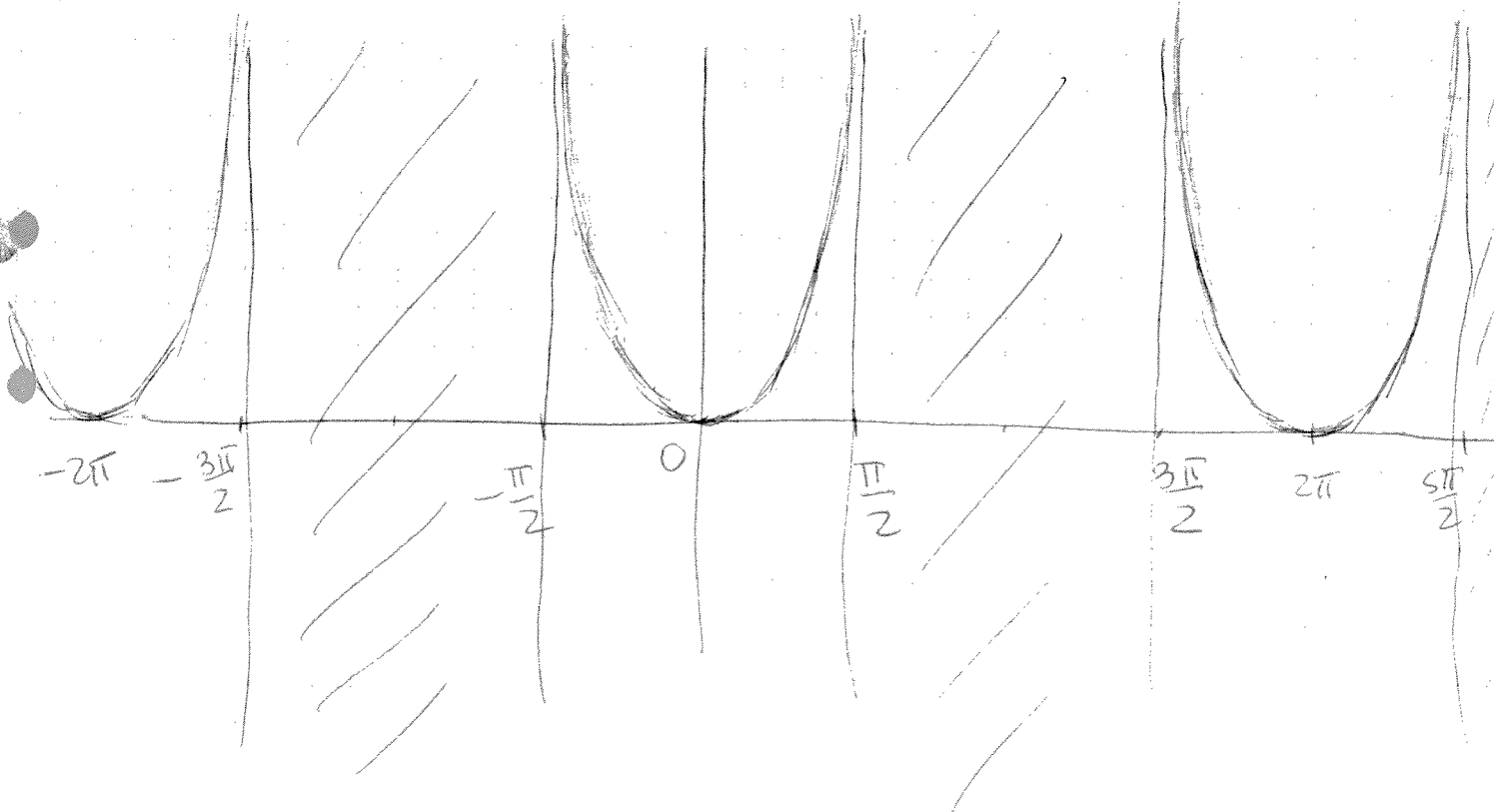
$$\Rightarrow \begin{array}{l} f' > 0 \quad \text{i} \quad (0, \frac{\pi}{2}) \\ f' < 0 \quad \text{i} \quad (-\frac{\pi}{2}, 0) \end{array}; \quad f'(0) = 0$$

$\Rightarrow f$ har lokalt min i 0
(vilket vi visste redan)

$$f''(x) = \frac{1}{\cos^3 x} > 0 \Rightarrow f \text{ (strengt) konvex}$$

i varje intervall

			$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$	2π
f			$+\infty$	0	$+\infty$			
f'	<i>symparas</i>		-	0	+		<i>symparas</i>	
f''			+	+	+			



$$\begin{aligned}
 \textcircled{4} \quad (a) \quad \int x^2 (\ln x)^2 dx &= \frac{1}{3} \int (x^3)^1 (\ln x)^2 dx = \\
 &= \frac{1}{3} x^3 (\ln x)^2 - \frac{1}{3} \int x^2 \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \\
 &= \frac{1}{3} x^3 (\ln x)^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \int (x^3)^1 \cdot \ln x dx = \\
 &= \frac{1}{3} x^3 (\ln x)^2 - \frac{2}{9} x^3 \ln x + \frac{2}{9} \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \\
 &= \frac{1}{3} x^3 (\ln x)^2 - \frac{2}{9} x^3 \ln x + \frac{2}{27} x^3 (+C)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad \int_0^p \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} &= \left[\begin{array}{l} t = e^x \quad \left| \quad dx = \frac{1}{t} dt \right. \\ dt = e^x dx \quad \left| \quad x=0: t=1 \right. \\ \quad \quad \quad \quad \left| \quad x=p: t=e^p \right. \end{array} \right] = \\
 &= \int_1^{e^p} \frac{dt}{t \sqrt{t+1}} = \left[\begin{array}{l} t+1 = u^2 \quad (u \geq 0) \quad \left| \quad t=1: u=2 \right. \\ t = u^2 - 1; \quad dt = 2u du \quad \left| \quad t=e^p: u = \sqrt{e^p+1} \right. \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^p+1}} \frac{2u du}{(u^2-1) \cdot u} = \textcircled{*}$$

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{(u+1)(u-1)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u-1}$$

$$1 = A(u-1) + B(u+1)$$

$$u=1 : 1 = 2B \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$u=-1 : 1 = -2A \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \textcircled{*} = \frac{1}{2} \left[\ln |u-1| \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^p+1}} - \frac{1}{2} \left[\ln |u+1| \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^p+1}} =$$

$$\begin{aligned}
 u^{\sqrt{p+1}} &= \left[\ln \frac{u-1}{u+1} \right]^{\sqrt{p+1}} = \quad \quad \quad \boxed{5} \\
 &= \ln \left(\frac{\sqrt{p+1}-1}{\sqrt{p+1}+1} \right) - \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \\
 &\quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\
 &\quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 1 \\
 &= \ln \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1} = \ln (3+2\sqrt{2})
 \end{aligned}$$

⑤ D_f : basen måste vara > 0

$$1 + \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} > 0$$

gäller i $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = e \Rightarrow y = e$ horisontell asymptot i $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = "+\infty^{+0}" \quad ?; = \otimes$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = "+0^{-1}" = +\infty$$

$$\otimes = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = x \ln \frac{x+1}{x} = \underbrace{x \ln(x+1)} - \underbrace{x \ln x}$$

$$\text{ty } x \ln x = \left[x = \frac{1}{t} \right] = \frac{-\ln t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad \left| \begin{array}{l} \downarrow \\ 0 \cdot 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \otimes = e^0 = 1$$

$$\textcircled{6.} (a) ? \exists \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

6

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(\xi_x), \text{ där } \xi_x \text{ ligger mellan } x \text{ o} \text{ c}$$

$$x \rightarrow c \Rightarrow \xi_x \rightarrow c \text{ (de två poliserna)}$$

$$\Rightarrow f'(\xi_x) \rightarrow \lim_{x \rightarrow c} f'(x) \text{ (som finns - givet)}$$

$$\Rightarrow \exists f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} f'(x)$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\exists f'(0) = 0 ; \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$$

$$\textcircled{7.} (b) ? \forall \varepsilon > 0 \exists A : \forall x > A \left| \frac{x+1}{x} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{x+1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{x+1-x}{x} \right| = \frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{ty } x \rightarrow +\infty$$

$$\text{Tag } A = \frac{1}{\varepsilon}$$