

**TMA970****Matematik Chalmers****Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM**

Datum: 2013-10-26, kl. 14:00 - 18:00.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Christoffer Standar, tel. 070-3088304, besöker salen ca 15:00 och 17:00.

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

$$(a) \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx; \quad (b) \int_0^{\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1} dx; \quad (c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx; \quad (d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx.$$

Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, sant/falskt.

(e) Om funktionen  $f$  är kontinuerlig i  $[a, b]$ , så är den begränsad i  $[a, b]$ .

(f) Om funktionen  $f$  är kontinuerlig i  $[a, b]$ , så är den begränsad i  $(a, b)$ .

(g) Om funktionen  $f$  är kontinuerlig i  $(a, b)$ , så är den begränsad i  $(a, b)$ .

(h) Om funktionen  $f$  är kontinuerlig i  $[a, b]$  och deriverbar i  $(a, b)$ , så är  $f'$  begränsad i  $(a, b)$ .

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger  $-1p$ , inget svar ger  $0p$ ; hela uppgiften ger minst  $0p$ .)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \quad (4p); \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x} \quad (4p).$$

3. Rita grafen till funktionen  $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ . Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (7p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till  $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2 + \cos 2x}}$ . (4p)

(b) Beräkna  $\int_{e^{-1}}^e |\ln x| dx$ . (4p)

5. Bestäm alla lokala extrema till funktionen  $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ . (5p)

6. Givet att  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ , betrakta ekvationen

$$\frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \dots + \frac{1}{x - a_n} = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Visa att den har exakt  $n - 1$  reella lösningar för  $c = 0$ , och exakt  $n$  reella lösningar för  $c \neq 0$ . (8p)

7. Visa att talföljden  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , har ett gränsvärde när  $n \rightarrow \infty$ . (7p)

8.(a) Formulera och bevisa Lagranges medelvärdessats (inkl. Rolles sats). (7p)

(b) Funktionen  $f$  är två gånger deriverbar i intervallet  $(a, b)$ . Om  $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ , där  $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ , visa att det finns en punkt  $\xi$  i  $(a, b)$ , sådan att  $f''(\xi) = 0$ . (2p)

Betygsgränser: 24-35p ger betyget 3; 36-47p ger betyget 4; 48p+ ger betyget 5.

/JM

TMA970 Inledande matematisk analys F/TM

Lösningar 26/10-2013

- ① (a) konvergent; (b) divergent;  
(c) konvergent; (d) konvergent;  
(e) sant; (f) sant;  
(g) falskt; (h) falskt

② (a)  $\sqrt{x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty \cdot (\infty - \infty) ?$

$$\sqrt{x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) =$$

$$= \frac{\sqrt{x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x} (x+1 - x)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

(b)  $\frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x} = \frac{\sqrt{2 \sin^2 \frac{x^2}{2}}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \left( \sin \frac{x^2}{2} > 0 \right)$   
(nära  $x \rightarrow 0$ )

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin \frac{x^2}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin \frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} \cdot \left( \frac{x/2}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sqrt{2}$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

2

$D_f \subseteq \mathbb{R}$ , ty  $2 + \cos x \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f$  periodisk med period  $2\pi$

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2 + \cos(-x)} = \frac{-\sin x}{2 + \cos x} = -f(x)$$

$\Rightarrow f$  udda

inga asymptoter ( $D_f = \mathbb{R}$ ; periodisk)

$f(x) = 0$  för  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \quad \text{i} \quad [2n\pi, \pi + 2n\pi] \\ \leq 0 \quad \text{i} \quad [\pi + 2n\pi, 2(n+1)\pi] \end{array} \right\} n \in \mathbb{Z}$$

Det räcker att rita grafen i  $[0, \pi]$ . M.h.a. att  $f$  är udda kan vi sedan få grafen i  $[-\pi, 0]$ , och m.h.a. periodiciteten i hela  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = \frac{\cos x (2 + \cos x) + \sin^2 x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{för} \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

d.v.s.  $x = \frac{2\pi}{3}$  (OBS! i  $[0, \pi]$ )  
end. avsn

	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$
$f'$	$\left(\frac{1}{3}\right)$	+	0 - $\left(-\frac{1}{3}\right)$

$$f''(x) = \frac{-2\sin x (2 + \cos x) + 2(2 + \cos x)(\sin 2x + \sin x)}{(2 + \cos x)^3}$$

$$= \frac{-2\sin x - \cancel{\sin 2x} + \cancel{2\sin 2x} + 2\sin x}{(2 + \cos x)^3} =$$

$$= \frac{\sin x (2 \cos x - 2)}{(2 + \cos x)^2} \leq 0 \quad \forall x$$

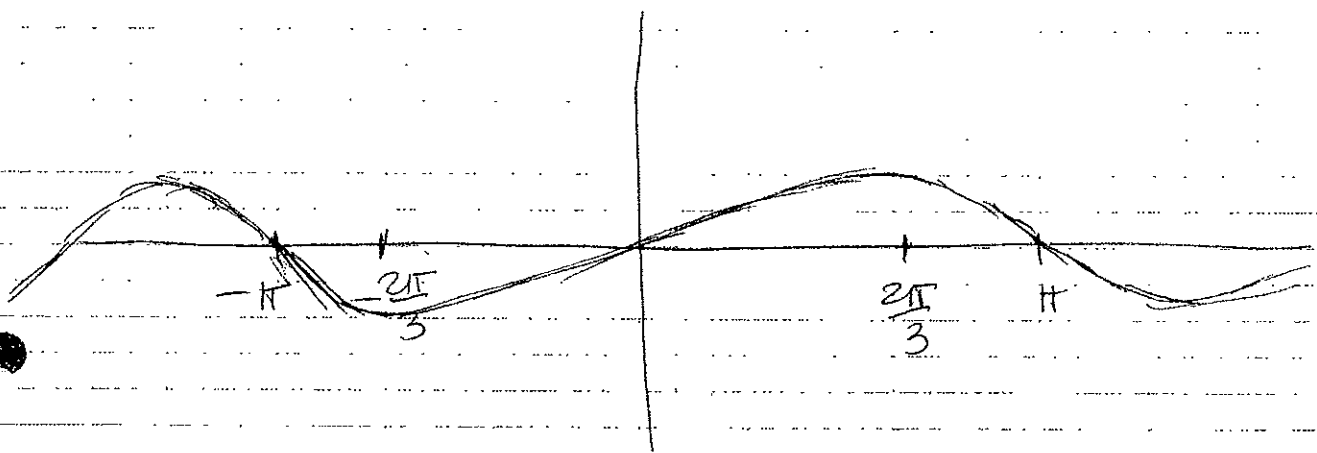
3

$$f''(x) = 0 \text{ för } x = k\pi$$

$$f'' < 0 \text{ i } (0, \pi)$$

	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	$0$	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$
$f$	infl.	loc. min	infl.	loc. max	infl.
$f'$	$-1$	$0$	$+\frac{1}{3}$	$0$	$-1$
$f''$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$

(tabellen är gjord i  $[-\pi, \pi]$  för att visa hur informationen överförs)



4. (a)  $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2 + \cos 2x}} dx =$

$$= \int \frac{(\sin x)'}{\sqrt{2 + 1 - 2\sin^2 x}} dx = \left[ t = \sin x \right] =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{3 - 2t^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{2}{3}t^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}t\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \int \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} dt}{\sqrt{1 - (\frac{\sqrt{2}}{3}t)^2}} =$$

4

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}t\right) + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sin x\right) + C$$

$$(b) \int_{\frac{1}{e}}^e \left| \ln \frac{|x|}{|x|} \right| dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 (-\ln x) dx + \int_1^e \ln x dx$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= x \ln x - x \quad (\text{racker med } \underline{e^u})$$

$$\Rightarrow \int = -\left[x \ln x\right]_{\frac{1}{e}}^1 + \left[x\right]_{\frac{1}{e}}^1 + \left[x \ln x\right]_1^e - \left[x\right]_1^e =$$

$$= -0 + \frac{1}{e} \cdot (-1) + 1 - \frac{1}{e} + e \cdot 1 - 0 - e + 1 =$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$$(5) \quad D_f: \left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 2|x| \leq 1+x^2 \Leftrightarrow (1-|x|)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$ ;  $f$  kontinuertlig i  $D_f$

$$\nexists f' \quad \frac{d}{dx} \frac{2x}{1+x^2} = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$

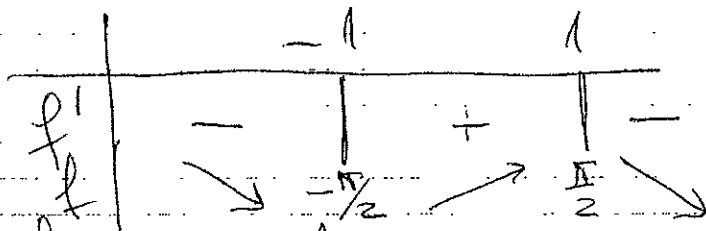
$$= \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{1+2x^2+x^4-4x^2} \cdot (1+x^2)^{\frac{1}{2}}} =$$

5

$$= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}} = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2}, & 1-x^2 > 0 \\ -\frac{2}{1+x^2}, & 1-x^2 < 0 \end{cases}$$

$= |1-x^2|$

$$= \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{for } |x| < 1 \\ -\frac{2}{1+x^2} & \text{for } |x| > 1 \end{cases}$$



$\Rightarrow f$  har lok. min i  $x = -1$   
 $f$  har lok. max i  $x = 1$

6.  $f(x) = \frac{1}{x-a_1} + \dots + \frac{1}{x-a_n}$

$D_f : x \neq a_k, k=1, \dots, n$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-a_1)^2} - \dots - \frac{1}{(x-a_n)^2} < 0$$

$\Rightarrow f$  avtagande i alla  
definitionsintervall

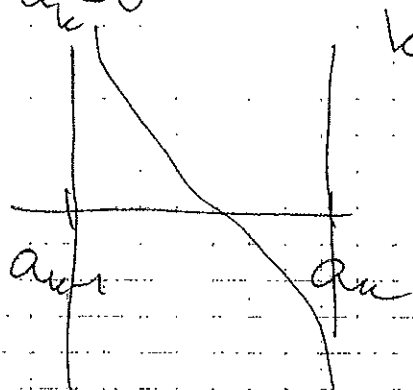
$\Rightarrow \exists$  högst ett nollställe i varje  
definitionsintervall

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -0$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +0$$

$$\lim_{x \rightarrow a_{k-0}} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow a_k+0} f(x) = +\infty$$



$k = 1 \dots n$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 ;$$

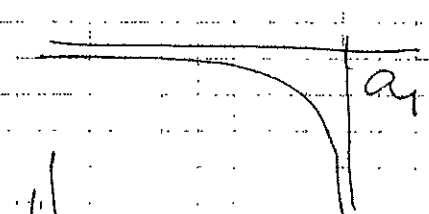
$$f(x) > 0 \text{ i } x = a_{k-1} + \varepsilon$$

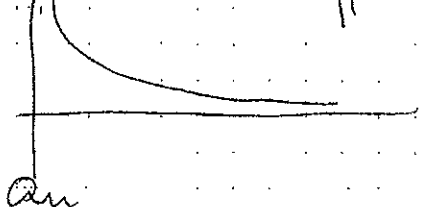
$$\exists \delta > 0 ;$$

$$f(x) < 0 \text{ i } x = a_k - \delta$$

$\Rightarrow \exists$  minst ett nollställe till  $f$   
i  $(a_{k-1}, a_k)$

$\Rightarrow \exists$  exakt ett nollställe till  $f$   
i  $(a_{k-1}, a_k)$

$(-\infty, a_1)$  :   $f$  avtagande,  
 $< 0$  i hela  
intervallet

$(a_n, +\infty)$  :   $f > 0$  i  
hela intervallet

$\Rightarrow f$  har exakt  $n-1$  nollställen i  $\mathbb{R}$

$c \neq 0$  :  $c < 0$  :  $f(x) - c$  har  $n-1$   
nollställen, ett i vardera  $(a_{k-1}, a_k)$   
och ett i  $(-\infty, a_1)$  ;  $c > 0$  : ett i  $(a_n, \infty)$